$\boxed{\text{Fubiuka}}$ VZOR

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx$$

- $a,b>0, \quad b<a$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x}\right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\cdot\frac{x}{x}\, dy\, dx$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2}\, dx\, dy = \int_b^a \frac{1}{y}\Big[\operatorname{arctg} yx\Big]_{0\,(x\to)}^\infty dy$$

$$= \int_b^a \frac{1}{y}\cdot\frac{\pi}{2}\, dy = \frac{\pi}{2}\Big[\ln|y|\Big]_b^a = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}}}$$

↳ výsledek >0, dává to smysl

- $a,b>0, \quad a<b$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\operatorname{arctg} yx}{x}\right]_a^b dx = -\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+y^2x^2}\, dy\, dx =$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{y}\frac{\pi}{2}\, dy = -\frac{\pi}{2}\left(\ln b - \ln a\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}}}$$

↳ <0, v pořádku

- $a,b<0 \quad b<a$

$$I(a,b) = \dots = \int_b^a \frac{1}{y}\Big[\operatorname{arctg} x\ \ yx\Big]_0^\infty dy = \int_b^a \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}}}$$

$I(a,b)$ je lichý v a i v b
→ mělo to tak vyjít

- $a,b<0 \quad a<b$

$$I(a,b) = \dots = -\int_a^b \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) dy = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}}}$$

- $a=b \quad I(a,b)=0$

- $a \le 0 \quad b > 0$
- $a > 0 \quad b \le 0$

$\Big\}$ $\int$ diverguje

neb

- $a \le 0 < b$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_a^b dx = -\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+y^2x^2}\, dy\, dx =$$

$$= -\int_a^0 + \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2}\, dx\, dy + -\int_0^b \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2}\, dx\, dy$$

$$= -\int_a^0 \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy - \int_0^b \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy$$

$$= -\int_a^0 -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y}\, dy - \int_0^b \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y}\, dy =$$

$$= -\int_a^b \frac{\pi}{2} \frac{1}{|y|}\, dy = \underline{\underline{-\infty}}$$

- $b \le 0 < a$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_b^a = \int_b^0 \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy + \int_0^a \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^0 -\frac{1}{y} \frac{\pi}{2}\, dy + \int_0^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{y}\, dy = \int_b^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{|y|}\, dy = \underline{\underline{\infty}}$$

Zdůvodnění Fubini: Funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2x^2} \ge 0$ na $(0,\infty) \times (a,b)$

nezáporná — měřitelná

$$\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{\cos bx - \cos ax}{x}\right) dx$$

VZOR 2

$0 < a < b$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\Big[\cos yx\Big]_a^b \, dx = \int_0^\infty \int_a^b \frac{e^{-x}}{x} \cdot (-\sin yx) \cdot x \; dy\,dx$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_a^b \int_0^\infty -\sin yx \cdot e^{-x} \, dx\,dy = \int_a^b \left[\frac{e^{-x}\left(y\cos(xy) + \sin(xy)\right)}{1+y^2}\right]_{x=0}^{\infty} dy$$

trochu per partes

$$= \int_a^b \frac{+y}{1+y^2}\, dy = \left[+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right]_a^b = \frac{1}{2}\ln(1+b^2) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2)$$

Funkce je sudá v a i v b, ∀ funguje pro lib $a, b \in \mathbb{R}$

Fubiniza:

$$\left|-\sin yx \cdot e^{-x}\right| \leq e^{-x} \qquad \int_a^b \int_0^\infty e^{-x}\, dx\,dy = (b-a)$$

Integrov. majoranta

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$ (1a)

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx}}{x}\right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx}}{x}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -e^{-yx}\,dy\,dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -e^{-yx}\,dx\,dy$$

$$= \int_b^a \left[\frac{e^{-yx}}{y}\right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{y}\,dy = \ln b - \ln a$$
$$= \ln \frac{b}{a}$$

$b, a > 0$, $b = a = 0$ $I = 0$, jinak div.

Předpoklady: $(0,\infty)\times(b,a)$ - měřitelné

$$-\int_0^\infty \int_b^a \underbrace{e^{-yx}}_{\text{nezáp. fce}}\,dy\,dx$$

$a < b$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-yx}}{x} \right]_a^b dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_a^b -\frac{1}{x}\, e^{-yx}(-x)\, dy\, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_a^b \int_0^\infty e^{-yx}\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \left[-\frac{e^{-yx}}{y} \right]_0^\infty dy = \int_a^b +\frac{1}{y}\, dy = \left[+\ln y \right]_a^b =$$

$$= +\ln b - \ln a = \underline{\underline{\ln \frac{b}{a}}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx \qquad (1b.)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2}\right]_b^a dx = \int_0^\infty\int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\cdot 2y\,dy\,dx$$

$$= \int_b^a \int_0^\infty \frac{2y}{1+y^2x^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left[2\cdot \operatorname{arctg} yx\right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^a \pi\cdot 1\,dy = \pi\left[y\right]_b^a = \underline{\underline{\pi(a-b)}}$$

$(0,\infty)\times(b,a)$ měřitelná

Vedlejší (třeba) $b<a$

$$\left|\frac{2y}{1+y^2x^2}\right| \le \left|\frac{2a}{1+b^2x^2}\right| \rightsquigarrow \text{majoranta}$$

$I(a,b)$ je sudý v a i v b

(1c)

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-0x^2}-e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}\,dx =$$

$-1<a<0$:

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x e^{x^2}}\right]_a^0 dx = \int_0^\infty \int_a^0 -x\,\frac{e^{-yx^2}}{e^{x^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^0 \int_0^\infty -x\,e^{x^2(-1-y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^0 \left[\frac{e^{x^2(-1-y)}}{+2(1+y)}\right]_0^\infty dy = \int_a^0 \frac{-1}{2(1+y)}\,dy$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\ln(1+y)\right]_a^0 = \underline{+\frac{1}{2}\ln(1+a)}$$

$$\frac{e^{-ax^2}}{x e^{x^2}} \sim e^{(-a-1)x^2} = e^{-(a+1)x^2}$$

Funkce $-x\,e^{x^2(-1-y)} \leq 0 \rightarrow$ Fub je legální

u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

5,70. Dokažte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz = \frac{4}{5} \pi abc ,$$

b/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad x^2 + y^2 \leq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x + y + z)^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right) ,$$

c/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad y^2 + z^2 \leq x^2 , \quad x \geq 0 , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2}) ,$$

d/ M je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2y$, $z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz =$

$$= \frac{a^4}{144} ,$$

e/* $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \quad x \geq 0 , \; y \geq 1 , \; z \geq 1 , \; xyz \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \cdot x^2 y \, dx\, dy\, dz = \frac{e}{2} - 1$$

[Zaveďte substituci $x = u$, $y = \frac{u+v}{u}$, $z = \frac{u+v+w}{u+v}$],

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z\, dx\, dy\, dz =$

$$= \frac{13}{4} \pi .$$

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$. (1cl)
(viz též př. 6,44 .)

[Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leq 0$, $b > 0$ anebo pro $a > 0$, $b \leq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0$, $b > 0$, nechť např. je $b < a$.
Uvažujme následující integrál I ,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\, dx\, dy \text{ , kde } M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a) \right\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M, tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}_M^{\mathcal{R}}$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) ,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

Odtud vyplývá, že

$$I(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy .$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$. 1e

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^y}{\log x}\right) dy = \int_a^b x^y\, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M \underbrace{x^y}_{\geq 0}\, dx\, dy , \quad M = \{[x,y] \in E_2 ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b)\}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\, dx = \iint_M x^y dx\, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx\right) dy = \log\frac{b+1}{a+1} . \quad \|$$

5,73. Poznámka:

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \log 2 \ (b = 1 , \ a = 0) ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x}\, dx = \log\frac{3}{2} \ (b = \tfrac{1}{2} , \ a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin\frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad 0 < b \leq a .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $$\frac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R \quad \text{pro } M = \{[x,y] \in E_2 ;$$

$$x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), \ y \in (0,1)\} ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2\sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad \text{pro } |A| > |B| .$$

B/ Použijte též vztahu

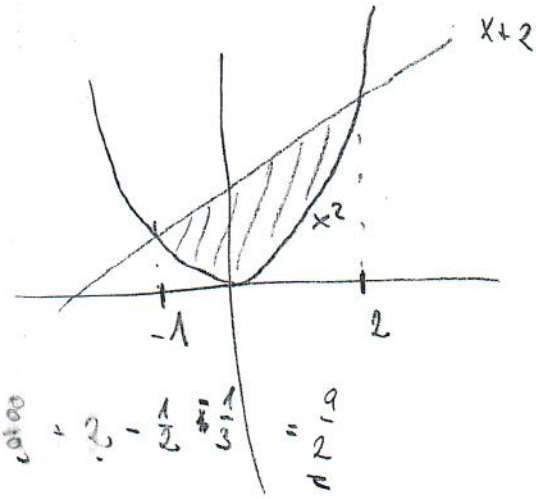
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_{b=y}^{a=y} = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-yx^2}}{x} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -x e^{-yx^2} \, dy \, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty \underbrace{-x e^{-yx^2}}_{\leq 0} \, dx \, dy =$$

$$= \int_b^a \left[\frac{1}{2y} e^{-yx^2} \right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y} \, dy = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$$

(2a) $M \subset \mathbb{R}^2$: $x^2 < y < x+2$

$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^{2} x+2-x^2 \, dx$$



$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = 4 + 2 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

2b

$0 \le x \le 1$, $|y| \le x$, $0 \le z \le xy^2$

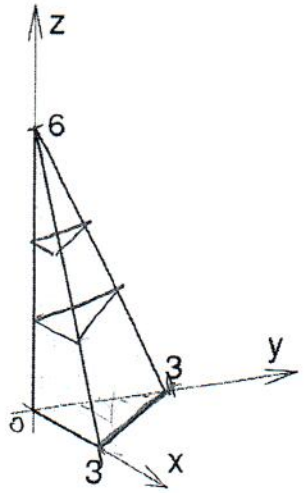
$$\int_{0}^{1} \int_{-x}^{x} \int_{0}^{xy^2} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_{0}^{1} \int_{-x}^{x} \left[z \right]_{0}^{xy^2} dy \, dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{-x}^{x} xy^2 \, dy \, dx = \int_{0}^{1} \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^{x} dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} \, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{0}^{1} = \frac{2}{15}$$

(2c)

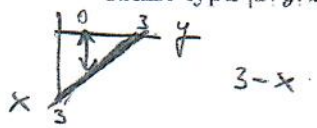
d) M je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



Rovina $2x+2y+z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$. Průmět množiny M do roviny je trojúhelník o vrcholech $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$. Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3 - x \\ 0 \le z \le 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

M je v tomto případě čtyřstěn a jedná se o elementární oblast typu $[x, y, z]$.



2.6 Integrály na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem n-rozměrného integrálu na měřitelné množiny:

Definice 2.5 *Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je integrovatelná na množině M, tj. že existuje integrál (Riemannův) z funkce f na množině M, existuje-li interval $I \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subset I$ a funkce $f \cdot \chi_M$ je na I integrovatelná.*
Potom klademe

$$\int_M f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_I (f \cdot \chi_M)(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

V následujících úvahách se omezíme na $n = 2, 3$.
Postačující podmínku pro existenci integrálu udává následující věta:

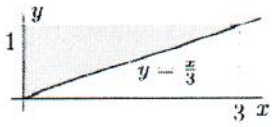
Věta 2.5 *Je-li $M \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je na M ohraničená a skoro všude spojitá, pak je f na M integrovatelná.*

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině M skoro všude, jestliže platí $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$ a neplatí $\forall x \in A$, kde $\nu_k(A) = 0$ (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).)
Fubiniova věta pro výpočet integrálu se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

Věta 2.6 *Nechť*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ a \le x \le b, d(x) \le y \le h(x)\}, \quad \textit{resp.}$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ a \le x \le b, d_1(x) \le y \le h_1(x), d_2(x, y) \le z \le h_2(x, y)\},$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{3y} \Big(\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}_{=x^2+y^2}\Big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{3y} (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x:=0}^{x:=3y}=12y^3} \Big)\,dy = \int_0^1 12y^3\,dy = 12\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 3$$

nebo jinak

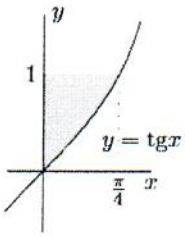
$$V(\Omega) = \int_0^3 \Big(\underbrace{\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2+y^2)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{3}}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3} \Big)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3\Big)\,dx = \left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{81}x^4\right]_0^3 = 3.$$

(2d)

Příklad 9.8:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \operatorname{arctg} y, 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{\operatorname{arctg} y} \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1\,dz}_{=\frac{6x}{1+y^2}}\Big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+y^2} \underbrace{\int_0^{\operatorname{arctg} y} 6x\,dx}_{=[3x^2]_{x:=0}^{x:=\operatorname{arctg} y}=3\operatorname{arctg}^2 y}\Big)\,dy = 3\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{1+y^2}\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2}\cdot(1+y^2)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64};$$

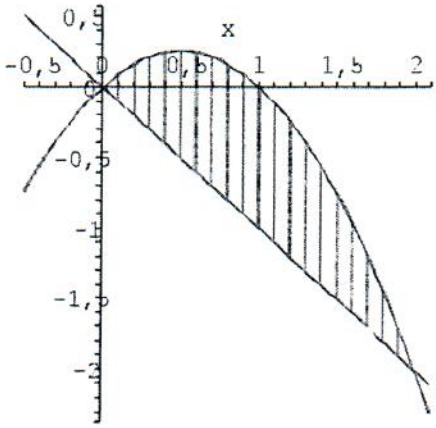
použili jsme substituci $t := \operatorname{arctg} y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2}\,dy$ tedy $dy = (1+y^2)\,dt$, 0 0 a 1 $\frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\operatorname{tg} x}^1 \frac{6x}{1+y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\,[\operatorname{arctg} y]_{y:=\operatorname{tg} x}^{y:=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\,dx = \left[\frac{3}{4}\pi x^2 - 2x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64};$$

neboť Ω lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ a $\operatorname{tg} x \le y \le 1$.

Příklad 9.9:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \ln y, 0 \le z \le \frac{6x}{y}\right\}.$$



Obr. 1

(3a)

Řešení: M je ohraničená přímkou $y = -x$ a parabolou $y = x - x^2$ (Obr. 1).

Souřadnice průsečíků obou křivek získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} y &= -x, \\ y &= x - x^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že křivky se protnou v bodech $(0, 0)$ a $(2, -2)$. Funkce $f(x, y) = xy$ je na M spojitá a je zřejmé, že pro libovolné $x \in \langle 0, 2\rangle$ je $-x \le y \le x - x^2$. Užitím Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M xy \,\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_{-x}^{x-x^2} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=-x}^{y=x-x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (x(x-x^2)^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = -\frac{16}{15}\,. \end{aligned}$$

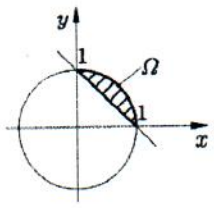
Příklad 1.9. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a $x = 3$.

Řešení: Množina M je část roviny ohraničená přímkami $y = x$, $x = 3$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ (Obr. 2).

Vyšetřením průsečíků křivek, které tvoří hranici množiny a také z obrázku je zřejmé, že pro všechny body (x, y) množiny je $x \in \langle 1, 3\rangle$ a $\frac{1}{x} \le y \le x$. Protože



Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

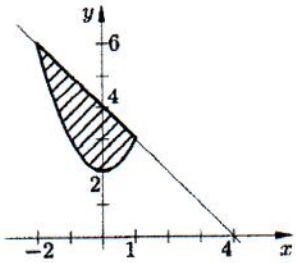
Zvolíme-li typ (y, x), pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_\Omega xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 (y^3 - y^4) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{20}.$$

(3b

84. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.



Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x = \int_{-2}^1 \tfrac{1}{2} \left((4 - x)^2 - (x^2 + 2)^2 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{81}{5}.$$

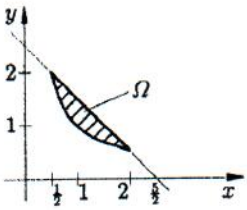
85. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x\left(\frac{5}{2} - x\right) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Platí $\Omega = \left\{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\right\}$.

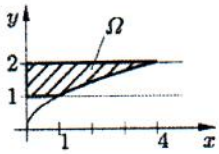
$$\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\tfrac{1}{2} x y^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x(\tfrac{5}{2} - x) - \tfrac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = \tfrac{165}{128} - \ln 2.$$

(3c) **86. Příklad** Spočtěte $\iint_\Omega \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq y \leq y^2\}$.



Obrázek 15: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$



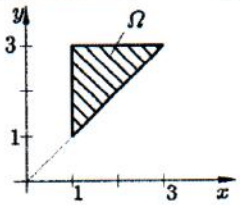
Obrázek 16: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

(3c)

$$\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right) dy = \int_1^2 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (ye^y - y)\,dy = \left[ye^y - e^y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_1^2 = e^2 - \tfrac{3}{2}.$$

87. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 17. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 3, x \le y \le 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le y \le 3, 1 \le x \le y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.



Obrázek 17: $\Omega : 1 \le x \le y \le 3$

$$\iint_\Omega \tfrac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_x^3 \tfrac{x}{y^2}\,dy\right) dx = \int_1^3 \left[-\tfrac{x}{y}\right]_x^3 dx = \int_1^3 \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) dx = \left[x - \tfrac{x^2}{6}\right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

$$\iint_\Omega \tfrac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_1^y \tfrac{x}{y^2}\,dx\right) dy = \int_1^3 \left[\tfrac{x^2}{2y^2}\right]_1^y dy = \tfrac{1}{2}\int_1^3 \left(1 - \tfrac{1}{y^2}\right) dy = \tfrac{1}{2}\left[y + \tfrac{1}{y}\right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

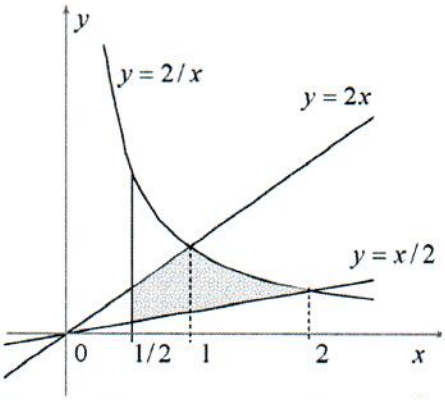
88. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 18. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$.

$$\iint_\Omega \tfrac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \tfrac{x^2}{y^2}\,dy\right) dx = \int_1^2 \left[-\tfrac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{9}{4}.$$

(3d) **Příklad 8:** Vypočítejte integrál $\int\int_D \frac{y}{x}\,dxdy$, kde množina D je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = \frac{1}{2}$.

Řešení: Integrační obor D je ohraničen třemi přímkami a jednou větví hyperboly - viz Obrázek 1.6. Je zřejmé, že obor D není oblast prvního ani druhého druhu. Lze jej ale rozdělit na dvě oblasti prvního druhu D_1 a D_2 tak, že $D_1 \cup D_2 = D$. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x}$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Převedeme jej na součet dvou integrálů. Dostaneme:



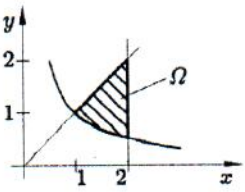
Obrázek 1.6: $D:\ y = \frac{x}{2},\ y = 2x,\ y = \frac{2}{x},\ x = \frac{1}{2}$

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{y}{x}\,dy\right)dx + \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}\frac{y}{x}\,dy\right)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{2x}dx$$

$$+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{8}x\,dx + \int\limits_{1}^{2}\left(\frac{2}{x^3} - \frac{x}{8}\right)dx = \frac{81}{64}.$$

Příklad 1.1.1: Převeďte $\int\int_D 1\,dxdy$ na dvojnásobný (pokud to lze) nebo na součet dvojnásobných integrálů. Množina D je omezená oblast v rovině ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

1. $D:\ x = 1,\ y = x,\ y = 2x$
2. $D:\ y = 5,\ y = 3x,\ y = \frac{1}{3}x$
3. $D:\ x + y = 1,\ y = x,\ y = \frac{1}{2}x$
4. $D:\ x = 1,\ x = 2,\ y - x = 5,\ y = 3$
5. $D:\ x \le y,\ y \le 1,\ x \ge 0$
6. $D:\ |x| \le y,\ y \le 2$
7. $D:\ y = x^2+1,\ y = x-1,\ 0 \le x \le 1$
8. $D:\ y^2 = x,\ 1 \le x \le 3$
9. $D:\ y \le x^2,\ y \le -x+2,\ y \ge 0$
10. $D:\ y \ge x^2,\ y \le -x+2,\ x \ge 0$
11. $D:\ y \le -2x,\ y^2 \le x$
12. $D:\ y \le x,\ y \ge x^2$
13. $D:\ x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = \frac{1}{x}$
14. $D:\ y = 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{y},$ $x = 3 - 2y$
15. $D:\ y = 0,\ y = 1,\ y = \sqrt{x},$

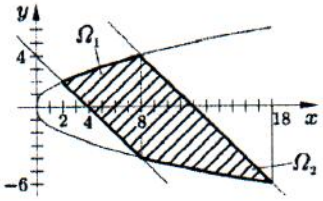


Obrázek 18: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

89. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

(3e)

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 19. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y). Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \le x \le 8, 4 - x \le y \le \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \le x \le 18, -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x\}$.

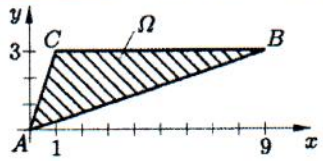


Obrázek 19: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_2^8 \left(\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} \left(\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_2^8 (\sqrt{2x} + x - 4)\mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} (\sqrt{2x} - x + 12)\mathrm{d}x = \frac{74}{3} + \frac{122}{3} = 62.$$

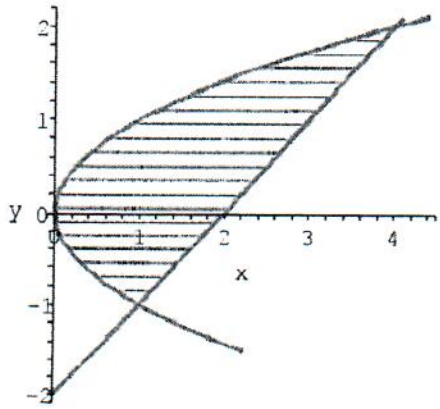
90. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sin y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 20. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \le y \le 3, \frac{1}{3}y \le x \le 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integálu $\int \sin y^2 \, \mathrm{d}y$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



Obrázek 20: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\iint\limits_{\Omega} \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \Big[x \cos y^2 \Big]_{\frac{y}{3}}^{3y} \mathrm{d}y = \frac{4}{3} \int\limits_0^3 2y \cos y^2 \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = y^2 \\ 0 \to 0, 3 \to 9 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{4}{3} \int\limits_0^9 \cos t \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \Big[\sin t \Big]_0^9 = \frac{4}{3} \sin 9.$$



Obr. 3

$$\int_M x^2 y \,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} y\left((y+2)^3 - y^6\right) \mathrm{d}y = \frac{603}{40}\,.$$

(3f)

Příklad 1.11. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A,$$

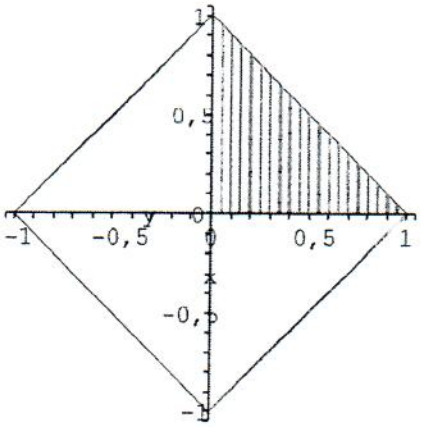
kde M je množina ohraničená křivkou $|x| + |y| = 1$.

Řešení: Hraniční křivkou množiny M je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ a $(0,-1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je na množině M spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}A$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce f je na M spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

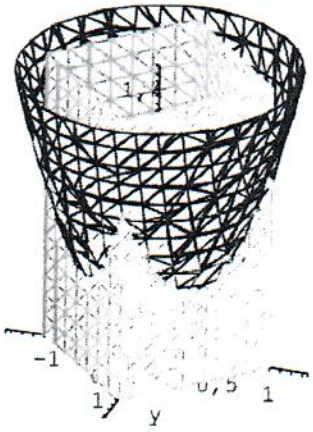
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : (x,y) \in M \wedge 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou z), je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny M ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto

3f



Obr. 4



Obr. 5

vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A = 4\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x =$$

$$= 4\int_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Příklad 1.12. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M (2x+y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y)\in \mathrm{R}^2 : x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge x+y\leq 3\}$. ***Výsledek:*** 27/2

Příklad 1.13. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y)\in \mathrm{R}^2 : 0\leq y\leq 1 \wedge y\leq x\leq 10y\}$. ***Výsledek:*** 6

Příklad 1.14. *Vypočítejte dvojný integrál*

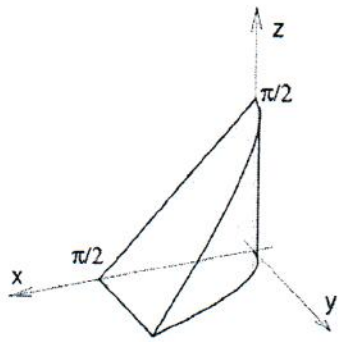
$$\int_M \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y^2=2x$ *a* $y=2x$.

Výsledek: $\ln(5/4)$

(3g)

c) $\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde M je ohranicena plochami* $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.



Množina M je shora ohraničena rovinou $x+z=\frac{\pi}{2}$, dale souřadnymi rovinami a parabolickou válcovou plochou $y=\sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny xy je shora ohraničen grafem funkce $y=\sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left[y\sin(z+x)\right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$$

Cvičení

V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

Příklad 8 $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde B je množina ohraničena přímkami* $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$. [3]

Příklad 9 $\iint\limits_B (2x+3y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde B je množina ohraničena parabolou $y^2=2x$ a její tetivou jdoucí body $A=(2,-2)$, $B=(8,4)$.* [$187\frac{1}{5}$]

Příklad 10 $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2, y\leq 4-x^2\}$ [$\frac{16}{3}\sqrt{2}$]

Příklad 11 $\iint\limits_B xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde B je množina ohraničena parabolou $y^2=2px$ a přímkou $x=\frac{p}{2}$.* [$\frac{p^5}{21}$]

Příklad 12 $\iiint\limits_B xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde B je množina ohraničena plochami $z=xy$, $x+y=1$ a $z=0$.* [$\frac{1}{180}$]

Příklad 13 $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde B je množina ohraničena plochami $z=xy$, $y=\sqrt{x}$ a rovinami $x+y=2$, $y=0$, $z=0$.* [$\frac{3}{8}$]

Příklad 14 $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde B je množina ohraničena plochami $z=1-4x^2-y^2$ a $z=0$.* [$\frac{\pi}{4}$]

Příklad 15 $\iiint\limits_B xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde B je množina ohraničena plochami $x=1$, $y=x$, $z=y$ a souřadnými rovinami.* [$\frac{1}{48}$]

Příklad 1.91. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W x^2 z\, e^{x-y+z^2}\, dV,$$

kde $W = \langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. ***Výsledek:*** $(e^2-5)(e^2-1)(e-1)/(2e)$

3h

Příklad 1.92. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x+y+z \leq 1\}$.

Řešení: Množina W je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník M (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Zřejmě $\forall (x, y) \in M$ je $0 \leq z \leq 1-x-y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_M \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, dz \right) dA.$$

Zapíšeme-li množinu M ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1-x\},$$

můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2\ln(1+x+y) - y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (2\ln 2 - 2\ln(x+1) + x - 1)\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:

Pro libovolné $z \in \langle 0, 1\rangle$ leží vždy bod (x, y) v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny xy $(z = 0)$ je trojúhelník M_z s vrcholy $(0, 0)$, $(1-z, 0)$, $(0, 1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_0^1 \left(\int_{M_z} \frac{1}{1+x+y}\, dA \right) dz.$$

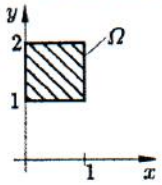
Část II
Integrální počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

(5)

81. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^y \, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y,x).



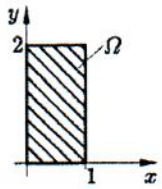
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^y dxdy = \int\limits_1^2 (\int\limits_0^1 x^y dx) dy = \int\limits_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int\limits_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \Big[\ln|y+1|\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\tfrac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x,y), narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 y e^{xy} \, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x,y).



Obrázek 12: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y e^{xy} dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y e^{xy} dy\right) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 y, & u'_y = x^2 \\ v'_y = e^{xy}, & v = \frac{1}{x} e^{xy} \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \left(\Big[xye^{xy}\Big]_0^2 - x\int\limits_0^2 e^{xy} dy\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big[(xy-1)e^{xy}\Big]_0^2 dx = \int\limits_0^1 (2x-1)e^{2x} + 1 \, dx = \int\limits_0^1 2xe^{2x} \, dx + \int\limits_0^1 e^{2x} \, dx + \int\limits_0^1 \, dx = \Big[xe^{2x} - e^{2x} - x\Big]_0^1 = 2.$$

83. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy^2 \, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \le 0, x + y - 1 \ge 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x,y) i (y,x). Zvolme typ (x,y). Platí $\Omega = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left[\tfrac{1}{3}xy^3\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_0^1 \tfrac{x}{3}\left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3\right) dx = \tfrac{1}{20}.$$

Teď integrujeme danou funkci.

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} 2e^{x/y}\,dy\,dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{x/y}\,dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy.$$

Toto je mnohem snažší, potřebujeme najít $\int e^{x/a}\,dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{c} w = \frac{x}{y} \\ dw = \frac{1}{y}\,dx \\ dx = y\,dw \\ x = y \mapsto w = 1 \\ x = y^2 \mapsto w = y \end{array}\right| = \int_0^1\int_y^1 2e^w y\,dw\,dy$$

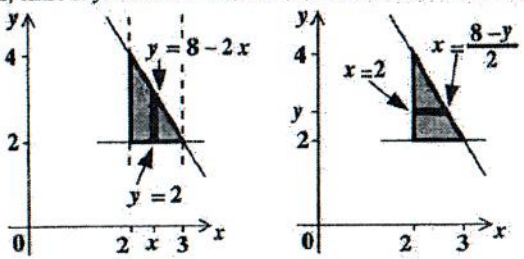
$$= \int_0^1 \Big[2y\,e^w\Big]_{w=y}^{w=1} dy = \int_0^1 2e\,y - 2y\,e^y\,dy = e\int_0^1 2y\,dy - \int_0^1 2y\,e^y\,dy$$

$$= e\Big[y^2\Big]_0^1 - \Big[2y\,e^y\Big]_0^1 + \int_0^1 2\,e^y\,dy = e - 2e + \Big[2\,e^y\Big]_0^1 = e - 2.$$

Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)}\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = 6e - 12.$$

(6a) **6.** Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y, která nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x, takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.

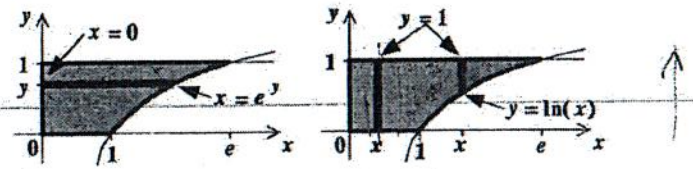


Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodor-

ovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4\int_2^{(8-y)/2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

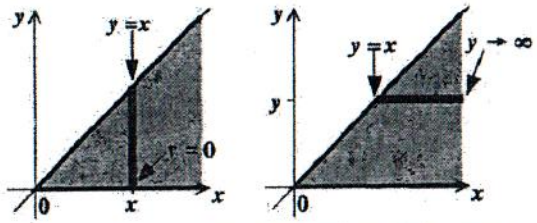
(6b) **7.** Začneme určením oblasti integrace Ω. Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnižší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Teď jsme připraveni to nakreslit.



Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e\int_{\ln(x)}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

(6c) **8.** Nejprve určíme oblast integrace Ω. Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.



Změna pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řezům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω, musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $(0,\infty)$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

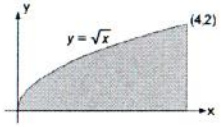
$$\int_0^\infty\int_y^\infty f(x,y)\,dx\,dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,

6. Změňte pořadí integrace

(a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

7. Který z následujících integrálů počítá obsah útvaru na obrázku?



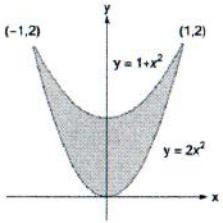
A $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

B $\int_0^4 \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

D $\int_0^2 \int_0^{y^2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

8. Který z následujících výrazů NEpočítá obsah útvaru na obrázku?



A $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

B $2\int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{-\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

D $2\int_0^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

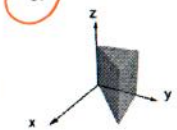
9. Určete množinu, přes kterou integrujeme v integrálu

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

A.

B.

C.



D.

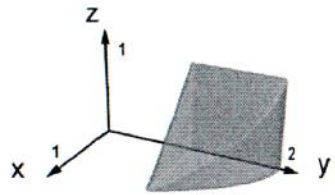
10. Na obrázku je těleso ohraničené plochami $x+z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=1$ a plochou $y=2-x^2$. Který z následujících integrálů počítá jeho objem?

A $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} \int_0^{1-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

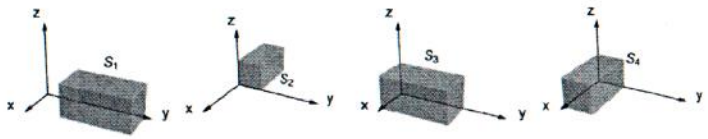
B $\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_0^{2-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\int_0^1 \int_1^{2-x^2} \int_0^{1-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

D $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



11. Na obrázku je stejné těleso v různých polohách. Seřaďte integrály $\int\int\int_{S_k} x\,\mathrm{d}\lambda$ podle velikosti.



A $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$

B $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$

C $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$

D $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$

E $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$

Zdroj 7.-11.: http://www.cpp.edu/ conceptests/question-library/mat215.shtml

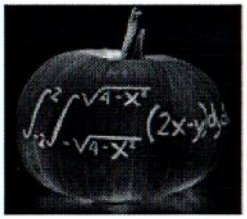


Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/