10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Fubiniova)**.** *Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathbb{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x,y)\, d\overline{\rho}(x,y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x,y)\, d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\, d\mu$$

a

$$\int_M f(x,y)\, d\overline{\rho}(x,y) = \int_X g\, d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x).$$

Poznámka 2. Speciálně lze Fubiniho větu použít, jestliže

- M je otevřená (nebo uzavřená) a f je spojitá a **nezáporná** (nekladná) na M.
- M je otevřená (nebo uzavřená) a **omezená** a f je spojitá a **omezená** na M.
- M je otevřená (nebo uzavřená) a f má na M integrovatelnou **majorantu**.

Příklady

1. Spočtěte

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

2. Spočtěte míru množiny

   (a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x+2\}$

   (b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, |y| \le x, 0 \le z \le xy^2\}$

(c) M, která je ohraničena plochami $2x+2y+z=6$, $x=0$, $z=0$, $y=0$.

(d) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 1, 0\le x\le \arctan y, 0\le z\le \dfrac{6x}{1+y^2}\}$

3. Spočtěte integrál přes množinu

(a) $\displaystyle\int_M xy\mathrm{d}A$ kde M je ohraničena křivkami $y=-x$ a $y=x-x^2$.

(b) $\displaystyle\int_M y\,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2-y+2=0$ a $x+y-4=0$.

(c) $\displaystyle\int_M e^{x/y}\,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x=0$, $y=1$, $y=2$ a $y^2=x$.

(d) $\displaystyle\int_M \frac{y}{x}\,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $y=\frac{2}{x}$, $x=\frac{1}{2}$.

(e) $\displaystyle\int_M 1\,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x+y=4$, $x+y=12$ a $y^2=2x$.

(f) $\displaystyle\int_M x^2+y^2\mathrm{d}A$ kde $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$

(g) $\displaystyle\int_M y\cos(x+z)\mathrm{d}A$ kde M je ohraničena plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

(h) $\displaystyle\int_M \frac{\mathrm{d}A}{1+x+y}$ kde $M=\{x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 1\}$

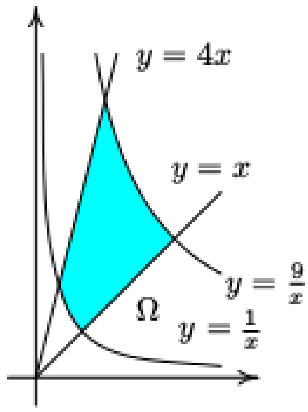
4. Sestavte (nepočítejte) dvojné integrály z funkce $f(x,y)$ přes množiny

(a) $M=\{x\le 2; 1\le y\le e^x\}$

(b) $M=\{0\le x\le 2; -x\le y\le x^2\}$

(c) $M=\{x^2-4x+5\le y\le 6x-3-x^2\}$

(d) M na obrázku



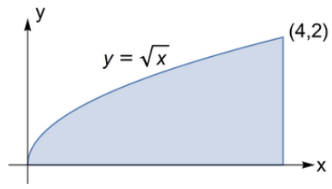
Bonus

5. Spočtěte integrál $\displaystyle\int_M x^y\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M=[0,1]\times[1,2]$. Zkuste zaměnit pořadí integrace.

6. Změňte pořadí integrace

(a) $\displaystyle\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

7. Který z následujících integrálů počítá obsah útvaru na obrázku?



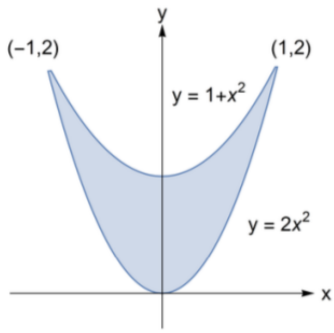
A $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

B $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

D $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y^2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

8. Který z následujících výrazů NEpočítá obsah útvaru na obrázku?



A $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

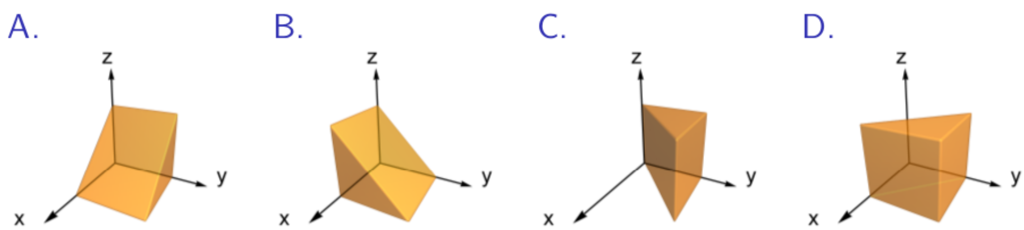
B $\displaystyle 2\int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{-\sqrt{y}/2}^{-\sqrt{y-1}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

D $\displaystyle 2\int_0^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

9. Určete množinu, přes kterou integrujeme v integrálu

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



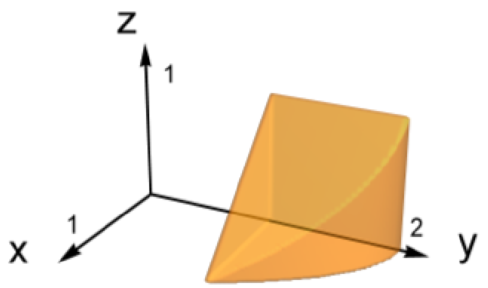
10. Na obrázku je těleso ohraničené plochami $x+z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=1$ a plochou $y=2-x^2$. Který z následujících integrálů počítá jeho objem?

A $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} \int_0^{1-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

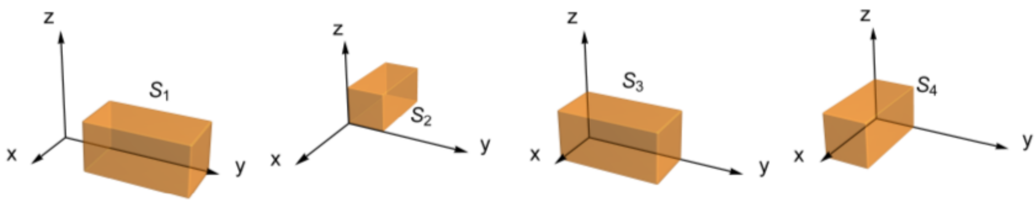
B $\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_0^{2-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

C $\int_0^1 \int_1^{2-x^2} \int_0^{1-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

D $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



11. Na obrázku je stejné těleso v různých polohách. Seřaďte integrály $\int\int\int_{S_k} x\,\mathrm{d}\lambda$ podle velikosti.



A $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$

B $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$

C $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$

D $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$

E $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$

Zdroj 7.-11.: http://www.cpp.edu/ conceptests/question-library/mat215.shtml

Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/