# 9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1** (Derivace integrálu závislého na parametru). *Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na $I$,*

(De-2) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce $g$ na $D$ tak, že pro všechna $\alpha \in I$ a $x \in D$ je*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) \right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $f(\alpha_0, \cdot)$ je integrovatelná na $D$.*

*Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná na $D$, funkce $F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$ je diferencovatelná na $I$ a platí vzorec*

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

## Příklady z minula

1. Spočtěte

   (a) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, \mathrm{d}x, \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta \geq 0)$

   (b) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, \mathrm{d}x, \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0)$

   Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

   (c) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha \in [-1, \infty)$

   (d) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, \mathrm{d}x, \qquad \beta \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$

   Hint: dce dle $\alpha$, $\int_0^\infty e^{-\beta x} \cos \alpha x\, \mathrm{d}x = \beta/(\alpha^2 + \beta^2)$.

### Nové příklady

2. Spočtěte

   (a) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x}\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha \in (-1, 1)$

   (Případně díky spojitosti pro $\alpha \in [-1, 1]$.)

   $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $(\arcsin y)' = 1/\sqrt{1-y^2}$, pro majorantu hledejte Hint níže

(b) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \qquad \alpha \in (-1,1)$

(Případně díky spojitosti pro $\alpha \in [-1,1]$.)

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1-\alpha^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

(c) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}$.

(d) $F(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x, \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

Hint: dce dle $\alpha$, $\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^2\sin^2 x}{\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\alpha+\beta}$

## Bonus

3. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha \in (0,\infty)$ splňuje diferenciální rovnici $F'' + F = \frac{1}{\alpha}$.

4. Vyšetřete průběh funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$. (Prozkoumejte spojitost, limity v krajních bodech, znaménko 1. a 2. derivace.)

5. Vyšetřete průběh funkce $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$. Bude potřeba:

**Lemma 2** (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na $D$. Potom* $\displaystyle\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j$.

6. $F(\alpha,\beta,\gamma) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin\gamma x\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha,\beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$

   Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x}\sin\gamma x\,\mathrm{d}x = \frac{-\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$

7. $F(\alpha,\beta,\gamma) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\gamma x}\frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \gamma > 0, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

8. $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\cos\beta x - e^{-\gamma x}\cos\delta x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha,\gamma > 0, \beta,\delta \in \mathbb{R}$

(2a) Hint: $|1+\alpha\cos x| \geq 1 - |\alpha\cos x| \geq 1 - |\alpha|$