8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť* $(X, \mathbb{S}, \mu)$ *je prostor s mírou a* $I \subset \mathbf{R}$ *je otevřený interval. Nechť funkce* $f : I \times D \to \mathbb{R}$ *má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna* $x \in D$ *je funkce* $f(\cdot, x)$ *diferencovatelná na* I,

(De-2) *pro všechna* $\alpha \in I$ *je funkce* $f(\alpha, \cdot)$ *měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce* g *na* D *tak, že pro všechna* $\alpha \in I$ *a* $x \in D$ *je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \le g(x),$$

(De-4) *existuje* $\alpha_0 \in I$ *tak, že* $f(\alpha_0, \cdot)$ *je integrovatelná na* D.

Potom pro všechna $\alpha \in I$ *je* $f(\alpha, \cdot)$ *integrovatelná na* D*, funkce* $F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$ *je diferencovatelná na* I *a platí vzorec*

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

Příklady z minula

1. Určete $\lim\limits_{a \to 0+} F(a)$, kde $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + \alpha \sin x)}{x}\, \mathrm{d}x$, $\alpha \in (0, \infty)$.

2. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0, 1)$.

3. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

Nové příklady

6. Spočtěte

   (a)

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

(b)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x} \,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

(c)

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0)$$

(d)

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta \geq 0)$$

Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

(e)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}} \,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

(f)

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x - \arctan \beta x}{x} \,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0) \vee (\alpha, \beta < 0)$$

(g)

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} \,\mathrm{d}x \qquad \beta \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$$

Hint: dce dle α, $\int_0^\infty e^{-\beta x} \cos \alpha x \,\mathrm{d}x = \beta/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Bonus

7. Existuje posloupnost funkcí $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ taková, že konverguje (stejnoměrně) k nulové funkci na každém kompaktu a zároveň platí, že $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$?

8. Je pravda, že charakteristická funkce Cantorova diskontinua je Lebesgueovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná?

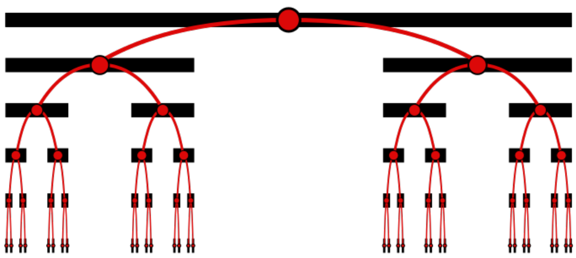

Figure 1: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Cantor_set_binary_tree.svg