7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Limita integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim\limits_{\alpha \to a,\, \alpha \in A} f(\alpha, x)$.*

(Li-2) *pro všechna $\alpha \in A$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,*

(Li-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in A$ a $x \in D$ je $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$.*

Potom $\displaystyle\int_D \lim_{\alpha \to a,\, \alpha \in A} f(\alpha, x)\, d\mu(x) = \lim_{\alpha \to a,\, \alpha \in A} \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$. (Speciálně výrazy vyskytující se výše mají smysl.)

Věta 2 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a,*

(Sp-2) *pro všechna $\alpha \in U$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,*

(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in U$ a $x \in D$ je $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$.*

Potom pro všechna $\alpha \in U$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Věta 3. Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0) \subset (p, q)$.

Příklady

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $[0, \infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha \to \infty} F(\alpha)$.

2. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0, \infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$.

3. Určete $\lim\limits_{a\to 0+} F(a)$, kde $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x}\, \mathrm{d}x$, $\alpha \in (0, \infty)$.

4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0, 1)$.

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

6. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

   Pozn.: Lze i přímým výpočtem

7. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

8. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

9. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

Bonus

10. Nechť $f \in L^1(0, \infty)$. Ukažte, že pak existuje posloupnost $x_n \to \infty$ taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n f(x_n) = 0$.

11. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Je pravda, že jestliže množina $\{x \in [0, 1]; f(x) = c\}$ je měřitelná pro $\forall c \in \mathbb{R}$, tak potom je funkce f měřitelná?

12. Ukažte, že jestliže $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou jednoduché funkce, tak potom jsou jednoduché i funkce $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ a $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$.

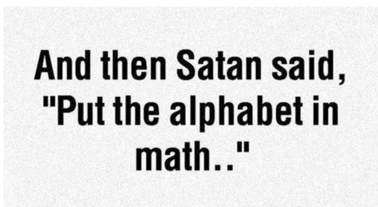

Figure 1: http://www.lovethispic.com/image/99563/and-then-satan-said,-put-the-alphabet-in-math