(10) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = $ [illegible]

(1) $\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2n}}{(2n)!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!} \qquad x \in (0,\infty)$$

(2) (d) $h_1 = e^{-x}\frac{1}{1} \in L^1(0,\infty)$

$h_n \overset{?}{\geq} h_{n+1}$ $\qquad$ NE ? $\qquad \frac{e^{-x}x^n x}{(2n+2)!} \overset{?}{\leq} \frac{e^{-x}x^n}{2n!}$

NE $\qquad x \leq (2n+2)(2n+1)$

(e) $\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$ $\qquad$?

(b) $\sum \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\cdot n! < \infty$

d'Al

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{2n!}} = \frac{2n(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{2} \checkmark$$

(3) $\int_0^\infty f = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}}}$

Vime: $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n!$

(5)

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx$$

(1) $$f(x) = \frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} = x e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x}$$

(2) Levi

(3) $$\int_0^\infty f(x) = \int \sum x e^{-(n+1)x} = \sum \int_0^\infty x e^{-(n+1)x}$$

$$\int x e^{-(n+1)x} = x \cdot \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} - \int \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}$$

$u = x$, $v' = e^{-(n+1)x}$

$u' = 1 \qquad v = \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}$

$$\frac{e^{-(n+1)x}}{+(n+1)(n+1)}$$

$$= \sum \left[x \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} - \frac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2} \right]_0^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\overset{D}{\circ}$ Per partes je Newton $\overset{D}{\circ}$

(6)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx$$

(1) $$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1} x^{qn} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+nq}$$

(2) (d) $h_1 = x^{p-1}$ $p>0$ $\int h_1$ konv.

$h_n \overset{?}{\geq} h_{n+1}$ $x^{p-1+nq} \geq x^{p-1+(n+1)q}$

$1 \geq x^q$ $q>0$ ✓

(3) $$\int_0^1 f(x) = \sum (-1)^n \int_0^1 x^{p-1+nq}\,dx = \sum (-1)^n \left[\frac{x^{p-1+nq+1}}{p+nq}\right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}$$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$

(1) $\displaystyle\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) Levi

(3) $\displaystyle\int f = \sum \int_0^1 \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \underline{\underline{1}}$

$$\int_0^1 \ln x \ \ln(1+x)\, dx$$

(1) $f(x) = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{-\ln x}_{\geq 0} \ \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{\geq 0}$

(2) Levi

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \int_0^1 \ln x \ x^{n+1} =$

$$\int \ln x \ x^{n+1} = \ln x . \frac{x^{n+2}}{n+2} - \int \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$u \qquad v'$

$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^{n+2}}{n+2}$

$$= \ln x \frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \left[\underset{\downarrow \atop 0}{\ln x \frac{x^{n+2}}{n+2}} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(n+2)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+e^x}\,dx$$

(1) $\frac{\sin x}{1+e^x} = \frac{\sin x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{-x}+1} = e^{-x}\sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n = e^{-x}\sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^n$

(2) např. (c)

$\int \sum |e^{-x}\sin x\,(-1)^n (e^{-x})^n| = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}}\,dx$

$= \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x-1}\,dx$

u ∞: $\leq \frac{1}{e^x-1}$ což konverguje, neboť se chová jako $\frac{1}{e^x}$

u 0: LSK s 1: $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{e^x-1} \cdot \frac{x}{x} = \underline{\underline{1}}$

tedy $\int \sum |g_n| < \infty$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^\infty \sin x \cdot e^{-x(n+1)}\,dx =$

u' v

$u=-\cos x$ $v' = -(n+1)e^{-x(n+1)}$ $\Rightarrow \left[-\cos x\, e^{-x(n+1)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \cos x (n+1) e^{-x(n+1)}$

u' v

$u = \sin x$ $v' = -(n+1)^2 e^{-x(n+1)}$

$= \left[\sin x (n+1) e^{-(n+1)x}\right]_0^\infty - \left(+\int_0^\infty \sin x (n+1)^2 e^{-x(n+1)}\right)$

tedy $(1+(n+1)^2)\int_0^\infty \sin x\, e^{-x(n+1)}\,dx = \left[e^{-x(n+1)}(-\cos x - (n+1)\sin x)\right]_0^\infty$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+(n+1)^2}$

$$\int_0^1 \ln x \ \ln(1+x)\, dx$$

(1) $f(x) = \ln x \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(2) $g_n = (-1)^{n+1} \cdot \Big[\underbrace{-\ln x \ \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{h_n}\Big]$

(d) $h_n \overset{?}{\geq} h_{n+1}$ $\qquad h_1 = x \ln x \qquad \int_0^1 x \ln x < \infty$

(lze spočítat; spojité kpt.)

$\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \frac{x^{n+2}}{n+2}$

$\frac{n+2}{n+1} \geq x \in (0,1)$ ✓

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n \int_0^1 \ln x \ x^{n+1}\, dx = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{-1}{(n+2)^2}}$

(11)

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \qquad |b| < a$$

(1) $$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = \underbrace{e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{g(x)}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ax} \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum | \quad |$$

$$\sum \boxed{\text{pr\'ime}} \quad I_n = \int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n}{a} I_{n-1} \qquad I_0 = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ?$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-ax} (|b|x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{a} \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdots \frac{(2n+1)}{a} |b|^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{a} < \infty$$

Geom. $\sum$ $\qquad |b| < a$

(3) Výpočet

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cdot \frac{b}{a^2} =$$

$$= \frac{b}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \underline{\underline{\frac{b}{a^2+b^2}}}$$

4,45. Buď $p \in (0,+\infty)$, potom

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$

Příklady a,b/ jsou analogické k příkladům 4,24; 4,25 , příklady c,d/ lehko odvodíte rozvojem funkcí $\frac{1}{1-x^p}$, $\frac{1}{1+x^p}$

Viz též př. 4,33, 4,34 /substituce $x^p = t$! / anebo př. 6,67

4,46. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$,

b/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12}$,

c/ $\displaystyle\int_0^\infty \log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}$

I/ Substitucí $e^{-x} = t$ převeďte dané integrály na integrály z příkladů 4,33 a 4,34.

II/ Příklad a/ řešte pomocí rozvoje funkce $\log(1-e^{-x})$ a Leviho věty, příklad b/ pomocí rozvoje funkce $\log(1+e^{-x})$ a Lebesguovy věty a konečně příklad c/ pomocí rozvoje funkce $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ (viz obdobný příklad 4,43) a Leviho věty.

III/ V příkladu c/ použijte též vztahu $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x})$.

4,47. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$.

1/ Jako cvičení ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (0,+\infty)$.

2/ Použijte rozvoje funkce sin v E_1 -

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{pro každé } y \in E_1 ,$$

Rozvoj

$$\text{tedy} \quad e^{-ax}\,.\,\sin bx = e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Dále použijte Lebesguovu větu, odhadneme částečné součty, "hrubým" odhadem dostáváme

$$\left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\,.\,e^{-ax}\,.\,\frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqq g(x), \text{ kde}$$

$$g(x) = e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(|b|x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty) .$$

Použijte dále vztahů

$$I_n = \int_0^\infty e^{-ax}\,.\,x^n\,dx = \frac{n}{a}\,I_{n-1} , \quad I_0 = \frac{1}{a} ,$$

Výsledek

dostáváme

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \frac{|b|}{a^2}\,.\,\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|b|}{a}\right)^{2k} \qquad \text{(ověřte!)},$$

tedy $g \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$, právě když $|b| < a$ (proč?).

V tomto případě

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

Při tomto způsobu výpočtu integrálu bylo nepříjemné omezení $|b| < a$.

3/ Integrál též spočtěte jako Newtonův pomocí dvojnásobné integrace per partes, jediná podmínka na parametry a,b bude při tomto způsobu výpočtu podmínka $a > 0$.

* 4/ Pokuste se také spočítat integrál pomocí následujícího postupu:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \operatorname{Im}\int_0^\infty e^{x(-a+ib)}\,dx = \operatorname{Im}\frac{1}{a-ib} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

4,48. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$!

Volte stejný postup jako v minulém příkladě .

4,49. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ pro $|b| < a$.

2/ Integrál spočtěte též pomocí Leviho věty, vztahu

$$\frac{\log x}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \log x \qquad \text{pro } x \in (0,1)$$

a příkladu 4,32 .

4,34. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1 - x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1 - x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1 + x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1 + x}\,dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$,

e/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1 + x}\,dx = \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{2^2}$!

4,35. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \log \frac{1}{1 - x}\,dx = 1$

1/ Integrál spočtěte jako Newtonův - per partes.

2/ Použijte též Leviho větu a vztah

$$\log \frac{1}{1 - x} = -\log(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{pro } x \in (0,1).$$

Nezapomeňte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

4,36. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{24}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} - 1$!

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{3k+1} . \log\frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2}{6} .$$

b/ Můžete použít rozvoje funkce $\frac{1}{1+x^3}$, Lebesgueovu větu a výsledku bodu a/, dostanete

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3}\log\frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+1)^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2}{12} .\|$$

4,43. Dokažte, že $\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\,dx = 2 . \log 2$.

1/ Integrál spočtěte metodou integrace per partes jako Newtonův.

2/ Ze vztahů

$$\left[\log\frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{2}{1-x^2} , \quad \log 1 = 0$$

Rozvoj

odvoďte, že

$$\log . \frac{1+x}{1-x} = 2 . \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pro } x \in (-1,1) ;$$

dále použijte Leviho větu, dostanete

Výpočet

$$\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\,dx = 2 . \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 2 . \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = 2\log 2 \quad \text{(viz př. 4,29)} .\|$$

4,44. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

1/ Použijte rozvoj funkce $\log\frac{1+x}{1-x}$ v intervalu (0,1) jako v př. 4,43 a Leviho větu, dostanete

Výpočet

$$\int_0^1 \frac{1}{x} . \log\frac{1+x}{1-x}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(viz př. 4,85)}$$

2/ Použijte vztahu

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$

a výsledků příkladů 4,33 , 4,34 .‖

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3}\, dx$$

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3} \qquad x \in (0,\infty)$$

(2) Levi

$0 \leq f_1 \leq f_2 \ \ldots$

$$\frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} \overset{?}{\leq} \frac{\operatorname{arctg} (n+1)x}{1+x^3} \qquad \text{OK, arctg rostoucí}$$

(3) $$\int_0^\infty \lim \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1/3}{1+x} + \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}$$

$$(1+x^3) = (1+x)(1+x^2-x)$$

$$A - Ax + Ax^2 + B + Bx + Cx^2 + Cx = 1$$

$$A+B=1$$
$$-A+B+C=0$$
$$A+C=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$C = -\frac{1}{3}$

$B = \frac{2}{3}$

$A = +1/3$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{x^2-x+1} + \ln(1+x)^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\underline{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{4}^{\infty} \frac{dx}{\ln x + \ln n}$$

konvergují ty integrály vůbec?

dokázání u ∞:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x + \ln n}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim \frac{\ln x}{\ln x + \ln n} = 1$$

ale $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ u ∞ divergují

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$$

tedy

$$\lim \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

1/ Ukažte, že $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$,

ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1_-} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1_-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu .

4,6. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!

1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx + \int_1^\infty x^{-n}\, dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2} \text{ , tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$,

potom $\sup\limits_{n\geq 2} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu!

4,7. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \; ; \; x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geq 2 \; , \; x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\frac{x}{n})^j \right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{2}\, n\, (n-1) \frac{x^2}{n^2} \right]^{-1} \leq \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx = 0$!

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx} dx = 0$.

Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \; , \; n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \to f \quad \text{na} \quad M \Rightarrow \int_M f_n \to \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1 \rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1 \rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1 \rangle$?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}}_{\to e^x} \cdot \sin\frac{x}{n}$$

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \cdot \sin\frac{x}{n} \overset{\text{VOAL}}{=} e^{-x} \cdot 0 = 0$

(2) $|f(x)| \le \left|\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right| \to e^{-x}$

Pro $x \in (1,\infty)$ - binomický rozvoj jěčo prve

Pro $x \in (0,1)$

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le 2 \in L^1(0,1)$$

We have pointwise convergence

$$\frac{(-1)^x n}{n+nx^2+1} \to \frac{(-1)^x}{x^2+1} \qquad \text{as } n \to \infty.$$

And for all $n \geq 1$ our integrand has an upper bound

$$\left|\frac{(-1)^x n}{n+nx^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1},$$

which is an integrable function on X, because $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+1} < \infty$. Thus the Lebesgue Dominated Convergence applies and gives the result.

JPE, May 1993. Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/n}}{1+x^2}\, dx$$

For every $x \in \mathbb{R}$ the sequence $\{e^{-x^2/n}\}$ monotonically increases and converges to $e^0 = 1$. Thus by the Lebesgue Monotone Convergence

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/n}}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

JPE, Oct 1991. (1) Prove that $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ is a bounded function on $(-\infty, \infty)$.
(2) Let

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (x \in [0,1],\ n = 1, 2, \ldots)$$

Then prove that $f_n(x)$ does not converge uniformly on $[0,1]$.
(3) Find $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$, if it exists.

(1) This a calculus exercise. Let us just denote the bound by $C = \max \frac{t}{1+t^2}$.

(2) For $x = 1/n$ we have $f_n(x) = 1/2$, thus there is no uniform convergence.

(3) We have pointwise convergence $f_n(x) \to 0$ for all $x \in [0,1]$ and a common upper bound $f_n(x) \leq C$. Thus Lebesgue Dominated Convergence applies.

JPE, Oct 1991. Let

$$f_n = n^{\alpha} \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$$

where α is a constant, $1 \leq \alpha < 2$.
(i) Is there an integrable function Φ on $[0,1]$ such that $0 \leq f_n(x) \leq \Phi(x)$ for all n and $x \in [0,1]$?
(ii) Find $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\, dm$, if it exists.

(i) No. Even if we set

$$\Phi(x) = \sup_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$$

then

$$\int_{[0,1]} \Phi\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

(ii) The limit is zero:

$$\int_{[0,1]} f_n\, dm = \frac{n^{\alpha-1}}{n+1} \to 0.$$

JPE, Oct 1991. (i) Let f be a step function on a bounded interval $[a,b]$. Then prove that

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx.$$

(ii) Let f be a bounded measurable function on $[a,b]$. Then prove (*).
(iii) Let f be an integrable function on $(-\infty, \infty)$. Then prove (*).

This problem is almost a research project... We only sketch the solution. First, let $f(x) = \alpha\chi_{(c,d)}$ be a constant function on an interval (c,d). Then

$$\int_c^d f(x) \sin(nx)\, dx = -\tfrac{\alpha}{n} \cos(nx)\Big|_c^d = -\tfrac{\alpha}{n} (\cos(nd) - \cos(nc)),$$

hence

$$\left|\int_c^d f(x) \sin(nx)\, dx\right| \leq \tfrac{2|\alpha|}{n} \to 0.$$

Next, if f is a step function, then $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{(c_i, d_i)}$, and the result follows by additivity.

(ii) If f is a bounded measurable function on $[a,b]$, then $f \in L^1([a,b])$. We can approximate f by step functions (in the L^1 norm) and apply Part (i).

(iii) The same strategy: approximate f by step functions (in the L^1 norm) and apply Part (i).

JPE, May 1991. Let

$$f_n(x) = \frac{n^{1/4} e^{-x^2 n}}{1+x^2}.$$

(a) Prove that $f_n \in L^1(0, \infty)$.
(b) Find $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n\, dm$.