6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Věta 1 (Záměna řady a integrálu)**.** Nechť $D \in \mathbb{S}$ a g_n, $n = 1, 2, \ldots$, jsou **měřitelné** funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

(a) $g_n = aq^n$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\, d\mu$ konverguje (geometrická řada),

(b) $\sum_n \int_D |g_n|\, d\mu < \infty$,

(c) $\int_D \sum_n |g_n|\, d\mu < \infty$,

(d) $g_n = (-1)^n h_n$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \cdots \geq 0$, $h_n \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_n g_n$ konverguje skoro všude a platí vzorec $\displaystyle\int_D \sum_n g_n\, d\mu = \sum_n \int_D g_n\, d\mu.$

Věta 2 (Leviho pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_n, $n = 1, 2, \ldots$, jsou **nezáporné měřitelné** funkce na D. Potom $\displaystyle\int_D \sum_n g_n = \sum_n \int_D g_n.$

Algoritmus

1. Rozviňte vhodnou funkci do (Taylorovy) řady. Vhodná funkce bývá 1/(1-něco), e^x, $\sin x$, $\cos x$... Zkontrolujte poloměr konvergence. Někdy je třeba funkci nejprve upravit.
2. Zvolte vhodnou větu. Jsou funkce nezáporné? Levi. Je řada geometrická nebo alternující? Co řada integrálu abs. hodnoty?
3. Pečlivě zkontrolujte **všechny předpoklady**.
4. Prohoďte řadu a integrál a spočtěte.

Hinty

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \qquad \int_0^{\infty} e^{-x} x^n = n!$$

Příklady

1. Z minula: rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p + nq}$, $p, q > 0$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$

2. Rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

(d) Pro $|b| < a$:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2},$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

Bonus

3. Spočtěte limitu

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\arctan nx}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln x+\ln n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$

4. Nechť $f_n = n\,\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.

(a) Najděte $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\mathrm{d}\lambda$, jestliže ovšem existuje.

(b) Existuje integrovatelná majoranta pro $x\in(0,1)$?

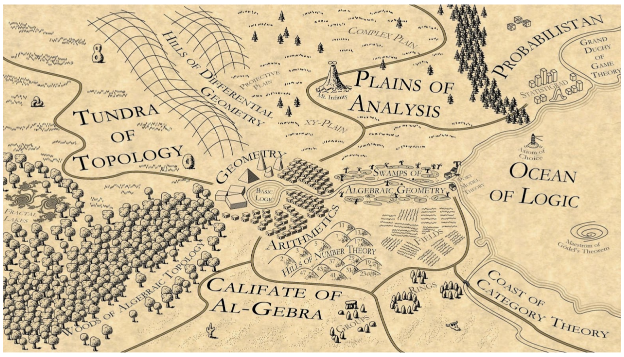

Figure 1: http://cvgmt.sns.it/HomePages/cm/

- (3a) Parciální zlomky, $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$
- (3b) Konvergují vůbec ty konkrétní f_n?
- (3c) Při odhadech pomůže binomický rozvoj
- (3d) Při odhadech pomůže binomický rozvoj