5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $D \in \mathbb{S}$. Řekneme, že funkce $D :\to \overline{\mathbb{R}}$ je *měřitelná*, jestliže pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathbb{S}$.

Věta 2 (Záměna řady a integrálu)**.** Nechť $D \in \mathbb{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

(a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\, d\mu$ konverguje (geometrická řada),

(b) $\sum_j \int_D |g_j|\, d\mu < \infty$,

(c) $\int_D \sum_j |g_j|\, d\mu < \infty$,

(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0$, $h_j \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu,$$

Věta 3 (Leviho pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou nezáporné měřitelné funkce na D. Potom

$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

Věta 4 (Lebesgueova věta pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že

$$\left| \sum_{j=1}^{k} g_j(x) \right| \leq g(x), \qquad k = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu.$$

Hinty

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n = n!$$

Příklady

1. Rozviňte do řady

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$, $p, q > 0$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$

   (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

   (j) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

2. Sečtěte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x\,\mathrm{d}x$.

Figure 1: https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load/