4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pak

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Algoritmus

1. Fixujeme x a spočteme $\lim_{n\to\infty} f_n$.
2. Jsou funkce nezáporné a posloupnost je rostoucí - pro pevné x roste v n? Levi.
3. Lze najít majorantu? Lebesgue.
   (a) Lze použít nějakou základní nerovnost? $x \leq 1$ pro $x \in [0,1]$, $|\sin x| \leq 1$, $\sin x \leq x$, $\ln x \leq x - 1$, $e^x < 1$? Nelze zmenšit jmenovatele, vzít jen 1 člen součtu?
   (b) Když nevíš, tak derivuj: funkci $g(n,x)$, $n \in [1,\infty)$, podle n. Maximum je pak v n_0 - bodu s nulovou derivací nebo v krajních bodech (tedy $n_0 = 1$ nebo v $\lim_{n\to\infty}$).
   (c) Nenašla by se majoranta alespoň pro $n \geq 2$?
4. Prohodíme limitu a integrál.

Příklady

1. Spočtěte

   (a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1 + n^2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n\sqrt{x} e^{-n^2x^2} \, \mathrm{d}x$

2. Spočtěte

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x, \quad 0<A<\infty$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a\in\mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$

3. Nechť $f\in L^1(\mathbb{R})$ (tedy $\int_{-\infty}^{\infty} f<\infty$). Ukažte, že pak $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

4. Nechť f_n je posloupnost nezáporných integrovatelných funkcí, u které lze zaměnit limitu a integrál. Je pak pravda, že existuje integrovatelná majoranta?

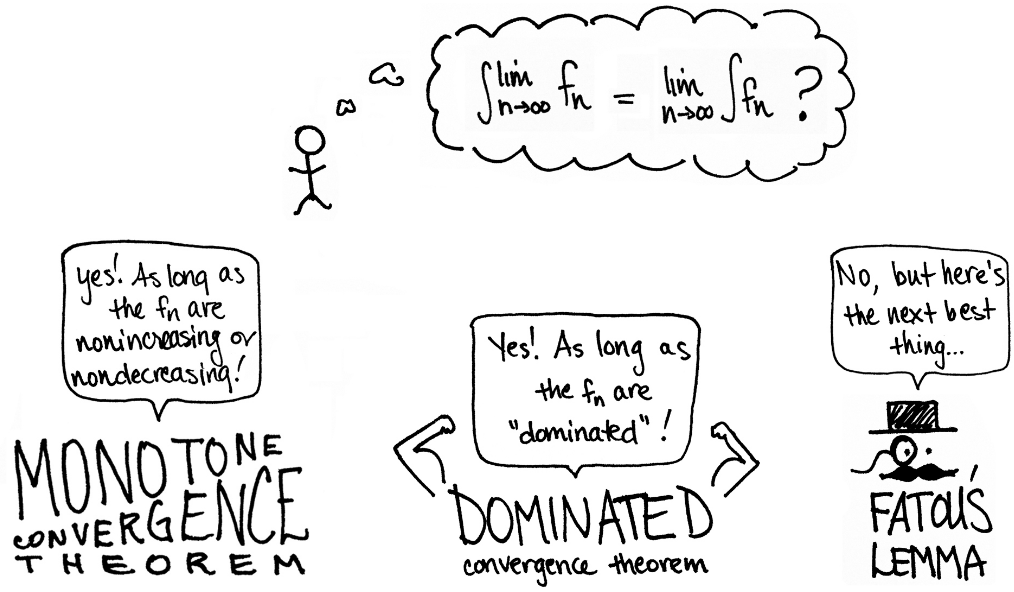

Figure 1: https://www.math3ma.com/blog/dominated-convergence-theorem

- (2d) U Lebesguea volte majorantu až pro $n\geq 2$
- (2f) Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n}<\frac{x+n}{n}\leq(1+x)$
- (2h) Odhadujte zvlášť $(0,1)$ a $(1,\infty)$
- (2j) K majorantě by pomohl binomický rozvoj.