3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pak

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Příklady

1. Určete λ míru množiny

(a) $[0,1]$
(b) $(0,1)$
(c) $[2,6)$
(d) $[0,\infty)$
(e) $\{-\pi\}$
(f) $\mathbb{Q}$
(g) $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$
(h) krychle $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$
(i) přímka v $\mathbb{R}^2$
(j) Cantorovo diskontinuum

2. Najděte příklad množiny A tak, aby $\lambda(A) > 0$, $A^{\circ} = \emptyset$.

3. Nechť E je měřitelná množina.

TRUE – FALSE Jestliže $|E| = 0$, pak $|\overline{E}| = 0$.

TRUE – FALSE Jestliže $|\overline{E}| = 0$, pak $|E| = 0$.

4. Spočtěte

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x, \qquad 0<A<\infty$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

(g)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a\in\mathbb{R}$$

(h)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

(i)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

(j)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$$

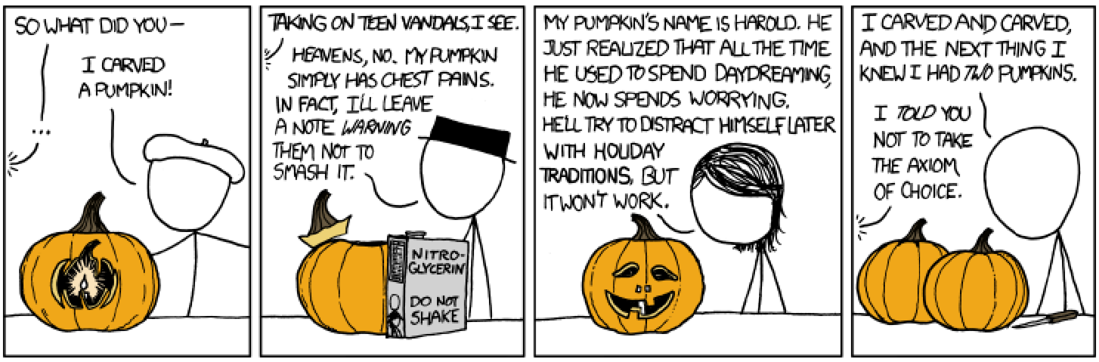

Figure 1: https://xkcd.com/804/

- (4d) U Lebesguea volte majorantu až pro $n\geq 2$
- (4f) Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1+x)$
- (4h) Odhadujte zvlášť $(0,1)$ a $(1,\infty)$