

(1a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$

probl. body: $0, \infty$ $f \geq 0$

"0"

$|q \geq 0|$ 1 "siluēji" uz x^q
 $g(x) = x^p$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ \frac{1}{2} & q = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x) dx < \infty \Leftrightarrow p > -1$$

$|q < 0|$ x^q "siluēji" uz 1
 $g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^q}{x^q + 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^{-q}}$$

$$= 1 \quad \int_0^2 f(x) dx < \infty \Leftrightarrow |p-q| > -1$$

" ∞ "

$|q \geq 0|$ x^q vedē uz 1
 $g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ \frac{1}{2} & q = 0 \end{cases}$$

KPMG

(1a) $\int_2^{\infty} f(x) \, dx < \infty \iff p - q < -1$

$q < 0$ 1 kocke hat x^q

$g(x) = x^p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$

$\int_2^{\infty} f(x) \, dx < \infty \iff p < -1$

Záver

$\int_0^{\infty} f(x) \, dx < \infty \iff$

$q \geq 0$	&	$p > -1$	&	$p - q < -1$
nebo		$q < 0$	&	$p - q > -1$ & $p < -1$

neboli

$q > p + 1$	&	$p > -1$
nebo		$q < p + 1$ & $p < -1$

$$(1b) \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(ax)}{x^p} dx$$

$$a, p \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad \overline{1a = 0} \quad \text{par} \quad f = 0 \quad \Rightarrow \int f \quad k$$

$$\bullet \quad a \neq 0$$

$$\text{probl. bool: } 0$$

$$\text{probl. ne } \pi ? \text{ probl. ucl. l'ine } 0$$

$$g(x) = x^{2-p}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos ax}{x^p}}{x^{2-p}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos ax}{a^2 x^2} \cdot a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0, \infty)$$

$$\int_0^{\pi} f(x) dx \quad k \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{p-2}} \quad k \Leftrightarrow p-2 < 1 = \boxed{p < 3}$$

$$(1c) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$$

Řešení:

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vlevo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vpravo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).²

Vyšetřujeme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0, 1]$, a protože

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arccotg}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b} dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujeme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arccotg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \operatorname{arccotg}^a x = 1,$$

²⁾ Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a+b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1-a$. Jinak diverguje.

(p) $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \quad \ln x = \ln(1+(x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x) dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a dx$$

a použitím substituce $y = x-1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x} dx$$

2a $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

probe body "0", " ∞ "

0: $\sqrt{1+x^3} \approx 1$

$\sin x^2 \approx x^2$

$g(x) = x^2$

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 \in (0, \infty)$

$\int_0^2 f < \infty \Leftrightarrow \int_0^2 x^2 < \infty \quad \checkmark$

" ∞ "

$|\sin x^2| \leq 1$

$\int_2^{\infty} \frac{|\sin x^2|}{\sqrt{1+x^3}} dx \leq \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$

$g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{1+x^3}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3}{1+x^3}} = 1 \in (0, \infty)$

$\int_2^{\infty} f < \infty \Leftrightarrow \int_2^{\infty} x^{-3/2} < \infty$
 $-\frac{3}{2} < -1 \quad \checkmark$

Zusatz $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx < \infty$

2b

$$i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log x \, dx$$

Integrand je spojité na $(0, \frac{\pi}{2})$, potenciálně problematické jsou okraje.

$$n. 0: \log x = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot x \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

$$\log x = \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \frac{1}{\cos^a x} \cdot x^a \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

Gronwallův test: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \frac{1}{\cos^a x} \cdot \frac{1}{x^a} \cdot x^a \stackrel{V_{oAL}}{=} 1 \cdot 1 = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^a \, dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow a > -1$$

$$n. \frac{\pi}{2}: \log x = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \quad \log x = \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^a \cdot \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^a}$$

Taylor v $\frac{\pi}{2}$ pro $\cos x$: $\cos x = -\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \frac{\pi}{2})^2) = (\frac{\pi}{2} - x) \cdot (1 + o(\frac{\pi}{2} - x))$

Gronwallův test: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\log x}{(\frac{\pi}{2} - x)^a} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^a x}{(\frac{\pi}{2} - x)^a} \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^a \stackrel{V_{oAL}}{=} 1$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log x \, dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^a \, dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^{-a} \, dy \text{ KONV.} \Leftrightarrow -a > -1$$

sub. $y = \frac{\pi}{2} - x$

$a < 1$

ZÁVĚR: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx$ KONV. pro $a \in (-1, 1)$
 DIV. pro $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ÚLOHA 2

$$a) \int_0^{\infty} x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}} \, dx = 2 \int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \, dy$$

subst. $\sqrt{x} = y \quad x \in (0, \infty) \mapsto y \in (0, \infty)$
 $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \infty) \quad \forall x \in (0, \infty)$

Integrand $y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}$ je spojité na $(0, \infty)$.

$$n. 0: e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 1 \Rightarrow \text{problema s } y^{-\frac{1}{2}}: \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}}{y^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{-y} = 1$$

$$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \text{ KONV.} \quad \text{tedy } n. 0 \text{ integrál konverguje}$$

$$n. \infty: y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \leq e^{-y} \quad \forall y \geq 1$$

$$0 \leq \int_1^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \leq \int_1^{\infty} e^{-y} = e^{-1} < \infty \Rightarrow \text{KONV.} \quad \text{tedy } n. \infty \text{ integrál navíc konverguje}$$

ZÁVĚR: $\int_0^{\infty} x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ KONVERGUJE

e) $\int_0^1 x^{-\ln x} dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x} dx$... integrand spojité na $(0,1]$.

N 0: $\ln^2 x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$... integrand le spojitě roste
na $[0,1]$, je tedy omezen $\Rightarrow$ KONV.

f) $\int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x}{x} dx$... integrand spojité na $(0, \infty) \Rightarrow$ máme zvláštní oba krajní body

N 0: $\operatorname{arctg} x = x + o(x) = x \cdot (1 + o(1))$.. MacLaurin 1. stupně

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\sin \frac{1}{x} \cdot x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x}{x} \text{ KONV. } \Leftrightarrow \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \text{ KONV. } \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \text{ KONV.}$$

$$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin \frac{1}{x}| dx \leq \int_0^1 1 dx = 1 \Rightarrow \text{ABS. KONV.}$$

N ∞ : $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 1$, $\operatorname{arctg} x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x}} \stackrel{\text{V0AL}}{=} \uparrow \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x}{x} \text{ KONV. } \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2} dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2} dx \text{ KONV.}$$

Konečný integrál tedy konverguje

2c) g) $\int_0^\pi \ln \sin x dx$... integrand spojité na $(0, \pi)$, N krajní boděch utěs do $-\infty$.

N 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$... plavíme pomocí $\ln(\sin x) \sim \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \stackrel{\text{V0AL}}{=} 1$$

$$\int_0^1 \ln \sin x dx \text{ KONV. } \Leftrightarrow \int_0^1 \ln x dx \text{ KONV. } \quad \int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{KONV.}$$

N π : $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi-} 1$... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě π .

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\ln \sin x}{\ln(\pi - x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi - x}} = \lim_{x \rightarrow \pi-} (-\cos x) \cdot \frac{\pi - x}{\sin x} \stackrel{\text{V0AL}}{=} 1$$

$$\int_1^\pi \ln \sin x dx \text{ KONV. } \Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi - x) dx \text{ KONV. } \Leftrightarrow \int_0^{\pi-1} \ln y dy \text{ KONV.}$$

subst. $y = \pi - x$

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln \sin x dx$ KONVERGENCE

2d)

$$\int_1^{\infty} \sin x^{\alpha} dx$$

• $\alpha = 0$

$$\int_1^{\infty} \sin 1 dx = \infty \quad \text{D}$$

• $\alpha < 0$

u 1 je too spoz

u ∞ : $\sin x^{\alpha}$ stornujeme s x^{α}

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 1$$

$$x^{\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{VOLTA (P)}$$

$$\int_1^{\infty} \sin x^{\alpha} dx \text{ Ak } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^{\alpha} dx \text{ Ak } \Leftrightarrow \boxed{\alpha < -1}$$

• $\alpha > 0$ substitute $x^{\alpha} = t$

$$x = t^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t dt \quad \text{Ak } \Leftrightarrow -(\frac{1}{\alpha}-1) > 1$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} dt$$

$$0 > \frac{1}{\alpha}$$

$$\boxed{0 > \alpha} \text{ ale } \boxed{\alpha > 0}$$

tedy $\int$ Absolutně konverguje pro $\alpha < -1$

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1, \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$.

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$ konverguje!

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův!

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \log^k x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\log x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}, \dots \end{aligned}$$

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0, +\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^R$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0, \quad \text{je podle cvičení 3,25 i } e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}.$$

Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

$$\text{existuje takové } x_0, \text{ že } 0 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ pro } x > x_0.$$

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \leq e^{-x^2} \cdot x^2 \leq 1 \quad \text{pro } x > x_0,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě (L) $\int_0^\infty e^{-2x+1} dx$ existuje /t.j. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^R$ /

a (N) $\int_0^\infty e^{-2x+1} dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}^R$.

2/ Protože

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}, \text{ tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1,$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} .$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx = +\infty$!

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^R$.

2/ Protože $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^3} (1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2} \text{ a funkce } \frac{1}{1+x+x^2}$$

4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje“ a „neexistuje“, protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

§20. První metodou je použití věty, která říká, že *je-li f funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

P ř í k l a d Integrál $\int_7^{50} \arctg(x^5 + 16) \cdot \sin x \, dx$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7, 50]$.

P ř í k l a d Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ konverguje, protože funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

je spojitá na $[0, 1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce f od a do b závisí jen na hodnotách f na (a, b) a ne na tom, zda a případně jak je f definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

§21. Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

P ř í k l a d Integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > -1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

P ř í k l a d Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha < -1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

P ř í k l a d Integrál $\int_0^1 \log x \, dx$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 \, dx = -1.$$

$$(2g) \int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx$$

• $f(x)$ spez na $(0,1]$

• problem u 0

• pro $q < 1$ ze $\int_0^1 \frac{|\sin x^p|}{x^q} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx < \infty \Rightarrow \int_0^1 f < \infty \text{ pro } \forall p$$

• pro $q \geq 1$

• $p > 0$ Lsg: $g(x) = \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0, \infty) \Rightarrow \text{conv. pro } p-q > -1$$

• $p = 0$ $f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$ < pro $q < 1$ (ale my issue $\rightarrow q \geq 1$)

• $p < 0$

Substitute $y = x^p$ $dy = p x^{p-1} dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y^{q/p}} \cdot \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} dy =$$

$$= -\frac{1}{p} \int_1^\infty \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1 - \frac{q}{p}} dy \quad \text{At } \Leftrightarrow 1 + \frac{q}{p} - \frac{1}{p} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{q-1}{p} > 0$$

ZÄVER Als pro $(q < 1, p \in \mathbb{R}) \vee (q \geq 1, p > 0, p-q > -1) \vee \underbrace{(p < 0, q \geq 1, \frac{q-1}{p} > 0)}_{\emptyset}$

oder $(q < 1, p \in \mathbb{R}) \vee (q \geq 1, p > q-1)$

22

Pr:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\ln x|^{\alpha}}{1+x^2} dx$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|\ln x|^{\alpha}}{1+x^2}$$

niezwykle, spójni na $(0,1)$ a $(1,\infty)$

~ bode 1: co když $x < 0$? pať ~~možná~~ problem

Singularita: 0, 1, ∞

"0": $k \geq 0$ $x^k \leq 1$ 1 vede nad x^k
 $k < 0$ $x^k > 1$ x^k vede nad 1

! byla' vylozene' vytknout vedouci' člena

$$\frac{|\ln x|^{\alpha}}{1+x^k} = \frac{|\ln x|^{\alpha}}{x^k(1+x^{-k})}$$

• $k \geq 0$ $g(x) = |\ln x|^{\alpha}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{1/2} \in (0, \infty)$$

$$\int_0^{1/e} f(x) dx < \infty \iff \int_0^{1/e} |\ln x|^{\alpha} dx < \infty \iff \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{schůvno } x^0)$$

• $k < 0$ $g(x) = \frac{|\ln x|^{\alpha}}{x^k}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^k}{1+x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f(x) dx < \infty \iff \int_0^{1/e} \frac{|\ln x|^{\alpha}}{x^k} dx < \infty \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

celkem: u 0 konv. $\forall k, \alpha \in \mathbb{R}$

(2a)

"1"

generates je konvergent: $1+x^k \rightarrow 2$ $\forall k$

$$| \ln x |^\alpha \approx |1-x|^\alpha \quad \text{weil} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$g(x) = (1-x)^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

P. mittels Symmetrie z. oben streuen

$$\int_{1/e}^1 f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_{1/e}^1 g(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_{1/e}^1 (1-x)^\alpha dx < \infty \Leftrightarrow \alpha > -1$$

$$\int_1^e f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx < \infty \quad \alpha > -1$$

" ∞ "

$k \geq 0$

$$1+x^k \approx x^k$$

$$1+x^k = x^k(1+x^{-k})$$

$$g(x) := \frac{|\ln x|^k}{x^k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 1/2 & k = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$$

$$\int_e^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_e^\infty \frac{|\ln x|^k}{x^k} dx < \infty \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{bald} & k > 1 \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{weil} & k = 1 \quad \alpha < -1 \end{array}$$

$k < 0$

$$g(x) := |\ln x|^\alpha$$

$$1+x^k \approx 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\int_e^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_e^\infty |\ln x|^\alpha dx < \infty \Leftrightarrow \text{Nikdy}$$

Záver

$$\int_e^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \underline{k > 1 \quad \& \quad \alpha > -1}$$

(2i) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \rightarrow$ funkci lze tedy spájit rozšířit do 0

$\rightarrow$ spájit na kompaktní $\rightarrow$ Až

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě (L) $\int_0^\infty e^{-2x+1} dx$ existuje /t.j. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^R$ /

a (N) $\int_0^\infty e^{-2x+1} dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}^R$.

2/ Protože

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} , \text{ tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 ,$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} .$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx = +\infty$!

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^R$.

2/ Protože $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^3} (1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2} \text{ a funkce } \frac{1}{1+x+x^2}$$

Řešení. Platí totiž $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ■

P ř í k l a d Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x} dx$ diverguje.

Řešení. Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\arctg x}{x} \geq \frac{\arctg 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \geq 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x} dx$ diverguje. ■

§25. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium**.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b)$ (kde $-\infty < a < b \leq +\infty$), funkce g nechť je kladná na $[a, b)$.

(i) Pokud limita $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud limita $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.

Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.

P ř í k l a d Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x dx$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a, b] = (0, \pi/2]$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$

tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha dx$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha dx$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ■

P ř í k l a d Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, \pi]$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{x}$. Ten ovšem diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ■

P ř í k l a d Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \arctg^\beta x dx$?

(22) **Řešení.** Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0, 1]$ je integrand spojitý a platí $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha \arctg^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \arctg^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, dx$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha \arctg^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \arctg^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ■

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

Příklad Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \leq 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \, dx,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ■

Příklad Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \, dt,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

$$(2e) \int_0^{\infty} x^{s-1} (\log x)^k e^{-x} dx$$

prob. body: $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix}$

"0" $e^{-x} \sim 0$

by steepest $g(x) = x^{s-1} (\log x)^k$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{s-1} \log^k x \cdot e^{-x}}{x^{s-1} \log^k x} \stackrel{\text{WAL}}{=} 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_0^1 x^{s-1} (\log x)^k dx < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} (s-1) > -1, & k \in \mathbb{Z} \\ \vee (s-1) = -1, & k < -1 \end{cases}$$

"1" $x^{s-1} \sim 0$, $e^{-x} \sim 0$

$\log x \approx x-1$

$g(x) = (x-1)^k$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{s-1} e^{-x} \cdot \frac{(\log x)^k}{(x-1)^k} \stackrel{\text{WAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} (x-1)^k dx < \infty$$

$$\int_1^{\infty} (x-1)^k dx = \int_0^{\infty} y^k dy = \begin{cases} \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_0^{\infty} & k \neq -1 \\ \left[\ln |y| \right]_0^{\infty} & k = -1 \end{cases}$$

$y = x-1$
 $dy = dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} k > -1 \\ k \leq -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k \\ D \end{array} \right.$$

$$2e) \int_1^3 f(x) dx \quad \Leftrightarrow \int_1^3 |x-1|^k dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{k > -1}$$

$$\int_1^3 (x-1)^k dx = \int_0^2 y^k dy$$

$y = x-1$
 $dy = dx$

" ∞ " e^{-x} přetáhne tu $\ln^k x$ i to x^{3-1}

malus
konvergence

$$\int_1^{\infty} x^{3-1} e^{-x}$$

$$g(x) = x^{3-1} x^k e^{-x}$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3-1} \ln^k x e^{-x}}{x^{3-1} x^k e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 0$$

" $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\text{tedy } \int_1^{\infty} g < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f < \infty$$

ale $\int_1^{\infty} g < \infty \quad \checkmark$

Závěr : $s > 0 \quad k \in \mathbb{Q} \quad \& \quad k > -1$
 nebo $s = 0 \quad k < -1 \quad \& \quad k > -1$

tedy $s > 0 \quad k > -1$

ÚLOHA 1

$$a) \int_0^1 x^a dx = \begin{cases} a \neq -1: [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a = -1: \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1} - \frac{0}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a < -1: \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases} \quad \int_0^1 x^a dx \begin{cases} \text{KONV. pro } a > -1 \\ \text{DIV. pro } a \leq -1 \end{cases}$$

$$b) \int_1^\infty x^a dx = \begin{cases} a \neq -1: [\ln x]_1^\infty = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a = -1: \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^\infty = \frac{\infty}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a < -1: \frac{0}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases} \quad \int_1^\infty x^a dx \begin{cases} \text{KONV. pro } a < -1 \\ \text{DIV. pro } a \geq -1 \end{cases}$$

(2m)

$$c) \int_0^\infty x^a + x^b dx = (*)$$

$$\int_0^\infty x^a dx = \underbrace{\int_0^1 x^a dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^a dx}_{=: I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 < \infty &\Leftrightarrow a > -1 \\ I_2 < \infty &\Leftrightarrow a < -1 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} I_1 + I_2 = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(*) = \int_0^\infty x^a dx + \int_0^\infty x^b dx = (+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$d) \int_0^{e^1} \frac{|\ln^a x|}{x} dx = \int_{-\infty}^{-1} |t|^a dt = \int_1^\infty t^a dt = \begin{cases} a < -1: \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a \geq -1: +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

sub. $t = \ln x$
 $dt = \frac{dx}{x}$
 $x \in (0, e^1) \mapsto t \in (-\infty, -1)$
 $\frac{1}{x} \in (0, \infty) \quad \forall x \in (0, e^1)$

$$e) \int_1^e \frac{\ln^a x}{x} dx = \int_0^1 t^a dt = \begin{cases} a \leq -1: +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a > -1: \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases}$$

sub. $t = \ln x$
 $dt = \frac{dx}{x}$
 $x \in (1, e) \mapsto t \in (0, 1)$
 $\frac{1}{x} \in (0, \infty) \quad \forall x \in (1, e)$

$$f) \int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x} dx = \int_1^\infty t^a dt = \begin{cases} a < -1: \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a \geq -1: +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

sub. $t = \ln x$
 $dt = \frac{dx}{x}$
 $x \in (e, \infty) \mapsto t \in (1, \infty)$
 $\frac{1}{x} \in (0, \infty) \quad \forall x \in (e, \infty)$

$$g) \int_0^{e^1} x^a |\ln x|^b dx$$

• necht $\varepsilon > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow 0} x^\varepsilon \cdot |\ln x|^b = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\varepsilon} \cdot |\ln x|^b = +\infty \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Integrand $x^a |\ln x|^b$ je spojitý na $(0, e^1]$, problematickým bodem je pole 0

b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx$... Integrand ist stetig auf $(0,1]$... problematische Stelle ist bei 0

$$\ln x = x + o(x^2) = x \cdot (1 + o(x)) \quad \dots \text{Maclaurin 2. Stufe}$$

oder $\ln x \sim x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx \text{ K} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}} dx \text{ K} \quad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow \text{KONV.}$$

Ü3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x} dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1} \sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} dx$

Integrand ist stetig auf $[0, \infty)$... problematische Stelle ist bei ∞

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} dx \text{ konvergiert alle Schritte: } \frac{1}{x+1} \searrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$|\int_0^M \sin x| = |\cos 0 - \cos M| \leq 2 \quad \forall M \in (0, \infty)$$

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x - \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \text{ NEEX.} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1} dx \text{ DIVERGIERE}$$

Ü2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$... Integrand ist stetig auf $(-1,1)$, problematische Stellen sind die Ränder

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1+x} \sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{Annäherung } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \sim 1$$

$$a \sim \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim -1$$

$$n=1: \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ KONV.}$$

Subst. $u_2 = 1-x$

$$n=-1: \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ KONV.}$$

Subst. $u = 1+x$

Also $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ KONVERGENZ

2n

d) $\int_0^1 x^{\ln x} dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x} dx$... Integrand ist stetig auf $(0,1]$, problematische Stelle ist bei 0.

Für $0 < x < e^{-1}$ ist $\ln x < -1$, sodass $x^{\ln x} > x^{-1}$ für $0 < x < e^{-1} < 1$

$$\int_0^1 x^{\ln x} dx = \underbrace{\int_0^{e^{-1}} x^{\ln x} dx}_{\in \mathbb{R}} + \int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x} dx > \int_0^{e^{-1}} x^{-1} dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

h) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} dx$... integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$,
 $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$\left| \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{M}(0, \pi) \Rightarrow \left| \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \right| \in \mathcal{M}(0, \pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{M}(0, \pi).$$

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)} dx$... integrand spojitý na $(0, \frac{1}{2}]$, problém u 0.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} = 1$$

Grovná lež: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x \cdot x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)} dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x \cdot x^2} dx \text{ KONV.}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x^3} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x} + 1 dx = +\infty, \text{ lež DIV.} \Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)} \underline{\underline{\text{DIV.}}}$$

(10) j) $\int_1^2 \frac{\arcsin(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p} dx$... integrand spojitý na $(1, 2]$, problém u 1.

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} = 1$$

Grovná: $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{\arcsin(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} = 1$

Grovná lež vyšetřit $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p} dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p \cdot (\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p (\sqrt{x}-1)^p} dx$

Grovná: $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p (\sqrt{x}-1)^p}}{\frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \stackrel{\text{VOLAL}}{=} 2 \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)^{1-p} dx$

Taylor u 1 z $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \Rightarrow$ pro změnu $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\frac{1}{2}(x-1))^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (x-1)^{1-p} dx = \int_0^1 t^{1-p} dt \Rightarrow 1-p > -1 \Leftrightarrow p < 2 \Rightarrow \text{KONV.}$
 subst. $t_0 = x-1, x \in (1, 2) \Rightarrow t_0 \in (0, 1) \Rightarrow 1-p \leq -1 \Leftrightarrow p \geq 2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{DIV.}}}$
 $dx = dt$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\sin x}{\pi - x} \right)^{\frac{1}{p-1}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(e^{-\frac{x}{2}} - \cos x \right) = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$$

$$n\pi: \text{provaní } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)^p dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^p dt \quad \begin{cases} p > -1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ p \leq -1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

$$\text{ZÁVĚR: } p > 3 \Rightarrow \text{KONV.}$$

$$p \leq 3 \Rightarrow \text{DIV.}$$

$$m) \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^p} dx \dots \text{integrand spjatý na } (0, \infty), \text{ problém u } 0 \text{ a } \infty$$

$$u 0: \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{provaní: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x - \sin x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{dává výsledně } \int_0^1 \frac{x^2}{x^p} dx \quad \begin{cases} 3-p > -1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ 3-p \leq -1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

$$u \infty: \frac{x-1}{x^p} \leq \frac{x - \sin x}{x^p} \leq \frac{x+1}{x^p} \Rightarrow \text{homogenita je ekvivalentní konvergence}$$

$$\text{integrálů } \int_1^{\infty} \frac{x + \alpha x^{\alpha}}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{1-p} + \alpha x^{\alpha-p} dx \quad \begin{cases} 1-p < -1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ 1-p \geq -1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

$$= x^{1-p} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{p-1}\right) dx \quad \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{ZÁVĚR: } \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^p} dx \quad \text{KONV. pro } 2 < p < 4$$

$$\text{DIV. pro } p \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$$

$$(14) m) \int_0^{\infty} \frac{\arctan px}{x^m} dx$$

$$\bullet p=0 \Rightarrow \text{integrand je konstantní } 0 \Rightarrow \text{KONV.}$$

$$\bullet p > 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan px}{px} = 1 \Rightarrow \text{provaní } \int_0^1 \frac{px}{x^m} dx \Rightarrow \begin{cases} 1-m > -1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ 1-m \leq -1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N}, \text{ když } p=1 \text{ pro } m=1 \text{ je oánee na konvergenci}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan px}{\frac{1}{x^m}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{provaní } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^m} \Rightarrow \begin{cases} -m < -1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ -m \geq -1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

$$\text{Jedý DIV i pro } m=1.$$

$$\bullet p < 0: \arctan px = -\arctan |p|x, \text{ když } \int_0^{\infty} \frac{\arctan px}{x^m} dx = -\int_0^{\infty} \frac{\arctan |p|x}{x^m} dx,$$

Identita integrál jsou právě vyjádřili.

$$\text{ZÁVĚR: } p=0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{konv.}$$

$$p \neq 0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{div.}$$

b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx$... integrand ist stetig auf $(0,1]$... problematisch für $x \rightarrow 0$

$$\ln x = x + o(x^2) = x \cdot (1 + o(x)) \quad \dots \text{Maclaurin 2. Stufe}$$

normale $\ln x \sim x$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx \text{ K} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}} dx \text{ K} \quad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow \text{KONV.}$$

Ü3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x} dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1} \sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} dx$

integrand ist stetig auf $[0, \infty)$... problematisch ist $x \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} dx \text{ konvergiert da Dirichlet: } \frac{1}{x+1} \searrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_0^M \sin x dx \right| = |\cos 0 - \cos M| \leq 2 \quad \forall M \in (0, \infty)$$

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x - \lim_{x \rightarrow 0+} \cos x \text{ NEEEX.} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1} dx \text{ DIVERGIERE}$$

(29) Ü2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$... integrand ist stetig auf $(-1,1)$, problematisch ist an den Rändern

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+x} \sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{normale } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim 1$$

$$a \sim \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim -1$$

$$\sim 1: \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt \text{ KONV.}$$

$$\text{subst. } t = 1-x$$

$$\sim -1: \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt \text{ KONV.}$$

$$\text{subst. } t = 1+x$$

$$\text{Jedes } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ KONVERGENZ}$$

d) $\int_0^1 x^{\ln x} dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x} dx$... integrand ist stetig auf $(0,1]$, fallen für $x \rightarrow 0$.

Für $0 < x < e^{-1}$ ist $\ln x < -1$, sodass $x^{\ln x} > x^{-1}$ für $0 < x < e^{-1} < 1$

$$\int_0^1 x^{\ln x} dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x} dx + \int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x} dx > \int_0^{e^{-1}} x^{-1} dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

$$c \in \mathbb{R}$$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{x}} dx$ $\arccos(x) = \frac{1}{\cos x}$... integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\left| \frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0, \pi) \Rightarrow \left| \frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{x}} \right| \in \mathcal{N}(0, \pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0, \pi).$$

(11-) a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)} dx$... integrand spojitý na $(0, \frac{1}{2}]$, problém v 0.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ • $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} 1$

Gronánie lež: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x \cdot x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)} dx \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x^3}{x \cdot x^2} dx \text{ KONV.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x^3}{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} + 1 dx = +\infty, \text{ lež DIV.} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \cdot \ln^2(1+x)} \text{ DIV.}$$

b) $\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p} dx$... integrand spojitý na $(1, 2]$, problém v 1.

• $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} = 1$

Gronánie: $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} = 1$

Ukáž' lež výslední: $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p} dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p (\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p (\sqrt{x}-1)^p} dx$

Gronánie: $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p (\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} 2 \Rightarrow$ stačí výslední $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)^{1-p} dx$

Taylor v 1 k $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \Rightarrow$ proměň $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\frac{1}{2}(x-1))^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí výslední $\int_1^2 (x-1)^{1-p} dx = \int_0^1 y^{1-p} dy \Rightarrow 1-p > -1 \Leftrightarrow p < 2 \Rightarrow \text{KONV.}$
 sub. $y = x-1, x \in (1, 2) \Rightarrow y \in (0, 1) \Rightarrow 1-p \leq -1 \Leftrightarrow p \geq 2 \Rightarrow \text{DIV.}$

Potom

- 1/ je-li $0 < A < +\infty$, platí $[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_{(a,b)}]$,
- 2/ je-li $A = 0$, platí $[g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)}]$,
- 3/ je-li $A = +\infty$, platí $[g \in \mathcal{L}_{(a,b)}^* \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)}^*]$.

[[Použijte definici limity a větu 31.]]

Jak by bylo možné požadavky kladené na funkce f, g zeslabit?

3,27.

Dokažte následující věty:

I/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a, +\infty \rangle$, $a > 0$.

Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot x^\alpha = A$. Potom

- 1/ $A \in (0, +\infty) \Rightarrow [f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha > 1]$,
- 2/ $A = 0 \Rightarrow [\alpha > 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}]$,
- 3/ $A = +\infty \Rightarrow [\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^\infty f = +\infty]$

[[Použijte buďto cvičení 3,25 a 3,26 anebo přímo definici limity.]]

II/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in E_1$.

Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) \cdot (b-x)^\alpha = A$.

Potom

- 1/ $A \in (0, +\infty) \Rightarrow [f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow \alpha < 1]$,
- 2/ $A = 0 \Rightarrow [\alpha < 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)}]$,
- 3/ $A = +\infty \Rightarrow [\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f = +\infty]$.

Vyslovte obdobné věty pro nekladné funkce!

Jak je možno oslabit předpoklady o funkci f ?

3,28.

Dokažte, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0, +\infty)$!

1/ Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$, tedy

$\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{A}_{(0,+\infty)}$ /věta 48/. Jelikož je tato funkce kladná, je $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}^*$ /věta 33/.

2/ Protože funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $\langle 0, 1 \rangle$,

existuje $(R) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, tedy $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ /věta 49/.

Jelikož v E_1 dále platí odhad $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

a $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ /věta 53 či cvič. 3,25/, je i $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$

/věta 31/. Použitím věty 26 odtud plyne, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Použijeme-li cvičení 3,27, dostáváme ze vztahů

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 = 1, \quad \alpha = 2 > 1$$