2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 2 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Najdeme podezřelé body - body nespojitosti, krajní body intervalu, nekonečna.
2. Je funkce spojitá na omezeném intervalu? Lze ji spojitě dodefinovat?
3. Je možné integrál přímo upočítat? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
4. Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x$
   u $\frac{\pi}{2}$: $\tan x = \sin x/\cos x$, pak užijte srovnávací tabulku pro $\cos x$.

   (c) $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$
   u π srovnejte $\sin x$ s $\pi - x$.

   (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$
   Pro $\alpha > 0$ substituujte $y = x^\alpha$.

(e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x$

Pro $p < 0$ převeďte na $\int \frac{\sin y}{y^r}$.

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

Nezapomeňte na singularitu u 1.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{arctan}^\beta x\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Vyšetřete body 0, 1, ∞, u ∞ srovnávejte s $x^{s-1}x^k e^{-x}$.

(m) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^1 x^{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{arctan}\,(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan}\,px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

$1 - x^4 = (1+x^2)(1-x)(1+x)$.

(r) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\,(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot(x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?