(1a)

$$\begin{cases} u' = 2u - 4v \\ v' = u - 3v \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{cc} u & v \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} \end{array} \qquad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ (\lambda-2)(\lambda+3) + 4 & -4(\lambda+3) + 4(\lambda+3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rce: $u'' + u' - 2 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$

$\underline{u = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}}$

pak

$u' - 2u + 4v = 0$

$4v = -(-2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}) + 2c_1 e^{-2x} + 2c_2 e^{x}$

$\underline{v = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} c_2 e^{x}}$ $\quad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

(15) $u' = u - 4v$

$v' = 2u - 3v$

$$\begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \lambda+3 \\ 0 & 8+(\lambda-1)(\lambda+3) \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \left(\begin{matrix} -2 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+8-3 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

$\lambda + 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$\lambda_1 = -1 + 2i$

$\lambda_2 = -1 - 2i$

$$v = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x$$

$-2u + v' + 3v = 0$

$$2u = -c_1 e^{-x} \cos 2x - 2c_1 e^{-x} \sin 2x - c_2 e^{-x} \sin 2x + 2c_2 e^{-x} \cos 2x + 3c_1 e^{-x} \cos 2x + 3c_2 e^{-x} \sin 2x$$

$$2u = (2c_1 + 2c_2) e^{-x} \cos 2x + (2c_2 - 2c_1) e^{-x} \sin 2x$$

$$u = (c_1 + c_2) e^{-x} \cos 2x + (c_2 - c_1) e^{-x} \sin 2x$$

(1c) $u' = -7u + 9v$

$v' = -u - v$

$$\begin{matrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+7 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+7)+9 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+8\lambda+16 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\lambda_{1,2} = -4$ $\qquad v = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

$u + v' + v = 0$ $\qquad u = -\left(-4c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x} - 4c_2 x e^{-4x}\right) - c_1 e^{-4x} - c_2 x e^{-4x}$

$$u = 3c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-4x} + 3c_2 x e^{-4x}$$

(4d)

$u' = 2u - 4v$

$v' = u - 2v$

$$A = \begin{array}{cc} u & v \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$u(0) = 0$

$v(0) = -1$

$\lambda I - A$:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-2) + 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$v'' = 0$ $\qquad$ $\underline{v = c_1 + c_2 x}$

$\lambda^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0$

$-u + v' + 2v = 0 \qquad u = c_2 + 2c_1 + 2c_2 x \qquad c_{1,2}, x \in \mathbb{R}$

$\underline{u = 2c_2 x + (2c_1 + c_2)}$

$u(0)$: $\qquad \underline{0 = c_2 + 2c_1} \qquad \boxed{c_2 = 2}$

$\boxed{-1 = c_1}$

$u = 4x$

$v = \underline{-1 + 2x}$

(1e)

$$u' = v$$
$$v' = -u$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \left(\begin{matrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2+1 & 0 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

$\lambda = \pm i$ $\qquad u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$v = u'$ $\qquad v = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

(1f) $u' = 2u - 3v$

$v' = u - 2v$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-2)+3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$\lambda = \pm 1$ $\qquad v = \underline{c_1 e^x + c_2 e^{-x}}$

$-u + v' + 2v = 0$ $\qquad u = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_1 e^x + 2c_2 e^{-x}$

$u = \underline{3c_1 e^x + c_2 e^{-x}}$

Řešení soustav pomocí úprav λ-matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď λ operátor derivování, tj. $\lambda z := z'$, $\lambda^2 z = z''$, ... S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné λ. Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.
Pozor, není možné vynásobit řádek polynomem v λ, tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

(1g)

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z\,, \\ y' &= 7x + 4y - z\,, \\ z' &= 13x + 7y - 3z\,. \end{aligned}$$

Řešení. S využitím zápisu pomocí λ dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda x - 2x - y + z &= 0\,, \\ -7x + \lambda y - 4y + z &= 0\,, \\ -13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0\,. \end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme $(\lambda+3)$ násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda-2)(\lambda+3) - 13 & (\lambda+3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme $(\lambda-4)$-násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici $-x'''+3x''-3x'+x=0$, v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\,.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme y:

$$y(t)=-x''-2x=-e^t(3c_1+2c_2+2c_3+t(3c_2+4c_3)+t^2\cdot 3c_3)\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

Z první rovnice dopočítáme z:

$$z(t)=e^t(-2c_1-3c_2-2c_3+t(-2c_2-6c_3)+t^2\cdot(-2c_3))\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y''+3z''-7y-6z &= t+1 \\ 4y''+3z''-4y-3z &= 2t. \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme si λ-matici s pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 4\lambda^2-4 & 3\lambda^2-3 & 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7-(\lambda^2-2)(2\lambda^2+3) & 0 & t+1-(t-1)''+2(t-1) \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda^4+3\lambda^2-1 & 0 & 3t-1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right).$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou $\lambda_{1,2}=\pm1$, $\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{2}/2$. Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)}+3y''-y=0$$

jsou

$$ae^t+be^{-t}+ce^{\sqrt{2}/2t}+de^{-\sqrt{2}/2t}.$$

(2a)

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ -4 & \lambda+2 & 3 \\ -2 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\, \lambda+2 \\ + \\ \cdot -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ (\lambda-4)(\lambda+2)+8 & 0 & 4\lambda+2 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot (\lambda-2) \\ + \\ \mid \cdot (4\lambda+2) \end{matrix}$$

$* \quad \cdot \mid(-4)$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ \lambda^2-2\lambda & 0 & 4\lambda+2 \\ (\lambda^2-2\lambda)(2-\lambda)+(2-\lambda)(4\lambda+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x}$$

$$(2-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda+4\lambda+2\right] = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1+i \qquad \lambda_3 = -1-i$$

$$* \quad \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ -8+4\lambda+\lambda^2-2\lambda & 0 & 10 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$10y_3 = -(\lambda^2+2\lambda-8)y_1$$

$$10y^3 = -y_1'' - 2y' + 8y_1$$

$\vdots$

$$y^3 = c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x$$

$$2y_2 = -4y_3 - (y_1' - 4y_1)$$

$$2y_2 = -4(c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x) - (c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x)' + 4(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x)$$

pak $\underline{y_2 = \frac{1}{2} e^{-x}\left((c_2+c_3)\sin x + (c_2-c_3)\cos x\right) + c_1 e^{2x}}$

zz

(2b)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot y$$

$$\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \lambda-4 \\ + \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 4-\lambda-6 & (\lambda-1)(\lambda-4)-2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim *\left(+\right. \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -2-\lambda & \lambda^2-5\lambda+2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(2+\lambda) \\ + \\ \cdot(\lambda-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & (\lambda^2-4)+(\lambda^2-5\lambda+2)\cdot(\lambda-2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -(2+\lambda)$$

$$\lambda^2-4+\lambda^3-5\lambda^2+2\lambda-2\lambda^2+10\lambda-4 = \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8 = (\lambda-2)^3$$

3-nás. kořen $\lambda = 2$

$$\underline{y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}}$$

$$* \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -4 & \lambda^2-4\lambda & 0 \\ -2-\lambda & \lambda^2-5\lambda+2 & 0 \end{pmatrix}$$

pak $+4y_1 = y_2'' - 4y_2'$

$$+4y_1 = -2e^{2x}\left(2c_1 + 2c_2 x + c_3(2x^2-1)\right)$$

$$y_1 = -e^{2x}\left(\underline{c_1 + c_2 + c_3\left(x^2-\tfrac{1}{2}\right)}\right)$$

$$-2y_3 = y_1' - 1y_1 - y_2$$

$$-2y_3 = -\tfrac{1}{2}e^{2x}\left(4c_1 + 2c_2 x + 2c_2 + 4c_3 x^2 + 4c_3 x - c_3\right)$$

$$y_3 = e^{2x}\left(c_1 + \tfrac{c_2}{2}x + \tfrac{c_2}{2} + c_3 x^2 + c_3 x - \tfrac{c_3}{4}\right)$$

(2c)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{array}{c} (\lambda-1)\cdot \\ + \\ (-1) \end{array} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ 2-szer $\qquad \underline{y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x}$

pak $\qquad y_2' - y_2 = -c_1 e^x - c_2 x e^x$

$$e^{-x} y_2' - e^{-x} y_2 = -c_1 - c_2 x$$

$$(e^{-x} y_2)' = -c_1 - c_2 x$$

$$y_2 = \underline{e^x \left(-c_1 x - \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + c_3\right)}$$

$y_3 = -y_2 - y_1' + y_1 \qquad y_3 = \frac{1}{2} e^x \left(\underline{2c_1 x - 2c_2 - 2c_3} + c_2 x^2\right)$

(201)

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (\lambda+1) \\ +(\lambda-3) \end{array} \sim \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda+1)+3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$*$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \qquad \underline{\underline{y_1 = c_1 + c_2 e^{2x}}}$$

$$\lambda(\lambda-2) \rightarrow$$

$*$ $(1)\cdot(\lambda-1)$
$+(2)\cdot(-3)$

$$\begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda-1)+3 & 3(\lambda-1)-3(\lambda+1) & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-4\lambda+6 & -6 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$+6y_2 = y_1'' - 4y_1' + 6y_1 \qquad 6y_2 = 6c_1 + 2c_2 e^{2x}$$

$$\underline{y_2 = c_1 + \tfrac{1}{3} c_2 e^{2x}}$$

nakonec

$$y_3' - y_3 = 2y_1 - 2y_2$$

$$y_3' - y_3 = \cancel{2c_1} + 2c_2 e^{2x} - \cancel{2c_1} - \tfrac{2}{3} c_2 e^{2x}$$

$$y_3' - y_3 = \tfrac{4}{3} c_2 e^{2x}$$

I. faktor:

$$e^{-x} y_3' - y_3 e^{-x} = \tfrac{4}{3} c_2 e^{x}$$

$$(e^{-x} y_3)' = \tfrac{4}{3} c_2 e^{x}$$

$$y_3 = \underline{e^{x}\left[\tfrac{4}{3} c_2 e^{x} + c_3\right]}$$

(2e)

$$y' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ -4 & \lambda+5 & -1 \\ -10 & 10 & \lambda+5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \cdot(-10) \\ - \\ (\cdot\lambda+5) \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ 40-10\lambda-50 & 0 & 10+(\lambda+5)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ -10(\lambda+1) & 0 & \lambda^2+10\lambda+35 \end{pmatrix} \cdot 10 \sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & \underbrace{\lambda^2+10\lambda+35 - 10\lambda - 10}_{\lambda^2-25} \end{pmatrix}$$

*

$\lambda^2+25=0$ $\qquad y_3 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$

$\lambda = \pm 5i$

$y_1' + y_1 = y_3' + y_3$

$y_1' + y_1 = (\cos 5x)(c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1)\sin 5x$

$(y_1 e^x)' = e^x [\cos 5x \ (c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1)\sin 5x]$, proměl PC

$y_1 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + c_3 e^{-x}$

$10 y_2 = -4y_3 + 9y_1 - y_1'$

$y_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin 5x + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos 5x + c_3 e^{-x}$