11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Algoritmus

1. Vyřešíme homogenní rovnici a sestavíme řešení (kde se bude vyskytovat několik konstant).

2. Zkontrolujeme, jestli náhodou přeci jen není příklad na speciální pravou stranu.

3. Přepíšeme konstanty na "funkce" a jdeme derivovat. Po každém zderivování se položí část rovnice s derivacem c' rovna 0. Konkrétně: začínáme s funkcí

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots c_n(x)y_n(x).$$

   Po 1. zderivování dostaneme

$$y_p' = (c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots c_ny_n') + (c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n)$$

   a položíme

$$(c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n) = 0.$$

   Po 2. zderivování dostaneme

$$y_p' = (c_1y_1'' + c_2y_2'' + \cdots c_ny_n'') + (c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n')$$

   a položíme

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n') = 0.$$

   Po n-tém zderivování dostaneme

$$y_p^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \cdots c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)})$$

   a dosadíme do původní nehomogenní rovnice. Dostaneme

$$(c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)}) = f.$$

4. Z modrých řádků získáme soustavu pro c', spočteme.

5. Zintegrujeme konstanty.

6. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

7. Případně dořešíme podmínky.

Hinty

$$\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int -\sin x \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int 1 + \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$\int -3x\sqrt{x+1}$ - subst. $t = \sqrt{x+1}$ pak

$$\int -3x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{(x+1)^3} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}$$

$$\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1. (a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

   (b) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

   (c) $y'' + y = \operatorname{tg} x$

   (d) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$

   (e) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

   (f) $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Zkouškové příklady

2. (a) $y'' + y = \sin^2 x$

   (b) $y''' + y' = \dfrac{1}{\cos x}$

   (c) $y''' + y' = \tan x$

Bonus

3. Najděte homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém řešení tvoří funkce:

   (a) e^x, e^{-2x}

   (b) $\cos 3x$, $\sin 3x$

   (c) $e^{2x}\sin(-x)$, $e^{2x}\cos(-x)$

   (d) e^{-5x}, xe^{-5x}

   (e) $\sin x$, $\cos 2x$

4. Je funkce h lineární kombinací funkcí f a g?

(ANO – NE) $h(x) = 4 + 3x$, $f(x) = (1+x)^2$, $g(x) = 2 - x - 2x^2$

(ANO – NE) $h(x) = \sin(x+2)$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

(ANO – NE) $h(x) = x^2$, $f(x) = (1-x)^2$, $g(x) = (1+x)^2$