$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} - C(x)P\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} + PC(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} = Q,$$

po úpravě dostaneme

$$C'(x) = Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

To je diferenciální rovnice pro funkci $C(x)$, jejíž řešení je možno napsat ve tvaru

$$C(x) = \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + K, \tag{23}$$

kde K je libovolná konstanta. Dosadíme-li tuto funkci do rovnice (20), obdržíme

$$y = \mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}\left(K + \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{24}$$

což je obecný integrál dané diferenciální rovnice.

1a

Příklad 5 – variace konstant – 1

Řešte rovnici $y' + y = \mathrm{e}^x$ metodou variace konstant.

Řešení

1. Nejprve řešíme příslušnou homogenní rovnici $y'+y=0$ metodou separace proměnných.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x,$$
$$y = C\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Předpokládáme $C = C(x)$, potom $y = C(x)\mathrm{e}^{-x}$, $y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}$. Po dosazení do původní nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^x, \\ C'(x) &= \mathrm{e}^{2x}, \\ C(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K, \end{aligned}$$

kde K je libovolná konstanta.

Pak $y = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K\right)\mathrm{e}^{-x}$, neboli

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + K\mathrm{e}^{-x}.$$

(1b) $xy' - y = x^2$

- pro $x \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$:

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

- $$y' = \frac{y}{x} \qquad\qquad y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$|y| = e^c |x| \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y = kx \qquad k \in \mathbb{R}$$

- $$y = k(x) \cdot x$$

$$k'x + k - \frac{kx}{x} = x$$

$$k' = 1$$

$$\underline{k = x + c}$$

- $$y = (x+c)\,x \qquad x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$$ $$c \in \mathbb{R}$$

- lepení

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} = 0$$

odhad:
$$y = \begin{cases} x(x+c_1) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x(x+c_2) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} y' = \lim_{x \to 0+} 2x + c_2 = c_2$$

lépe:
$$y = \begin{cases} x(x+c_1) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x(x+c_1) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} y' = \lim_{x \to 0-} 2x + c_1 = c_1$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$u = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K$$

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Můžeme si všimnout, že v obou postupech jsou počítané integrály stejné.

5.1 Řešené úlohy

(1c)

Příklad 5.1 $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

Řešení DR

zkrácená LDR

$$y' - xy = 0$$

to je DR se separovanými proměnnými

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\tilde{y} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

to je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

derivace bude:

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

(1c)

dosadíme do zadání

$$\left[C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right] - xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$$

$$C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2+2x}{2}}$$

$$C'(x) = e^{\frac{2x}{2}}$$

$$C'(x) = e^{x}$$

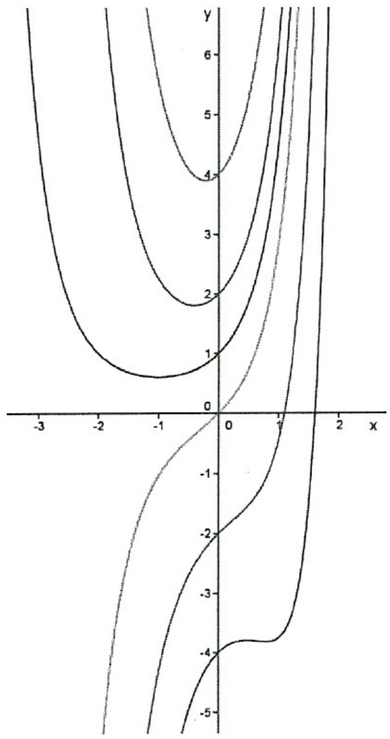
$$C(x) = \int e^x dx = e^x + K$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ a dostaneme

$$y = (e^x + K)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

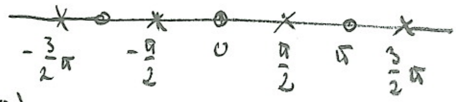
kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(1d) $y' \tan x - y = 1$



$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; dále řešíme pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $+ k\pi$

- $y' - y \cdot \cot x = \cot x$

$$y' = y \cdot \cot x \qquad y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cot x \, dx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = |\sin x| \cdot e^{c}$$

$$\underline{y = k \cdot \sin x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

- $k' \sin x + k \cos x - k \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$k' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$k = \frac{-1}{\sin x} + d \qquad d \in \mathbb{R}$$

pak $y = \left(\frac{-1}{\sin x} + d\right) \sin x = -1 + d \cdot \sin x$

lepení v $0 + k\pi$

slepeno spojitě.

$$y = \begin{cases} -1 + d_1 \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1 & x = 0 \\ -1 + d_2 \sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

Dce: $\lim\limits_{x \to 0-} y' = \lim\limits_{x \to 0-} -1 + d_1 \cos x = -1 + d_1$

$\lim\limits_{x \to 0+} y' = \lim -1 + d_2 \cos x = -1 + d_2$

Znovu:

$\rightsquigarrow d_1 = d_2$

$$y = \begin{cases} -1 + d_e \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1 & x = 0 \\ -1 + d_e \sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} + k\pi, \quad k \in \mathbb{R}$$

toto je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot \sin x$$

derivace bude

$$y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x$$

dosadíme do zadání

$$[C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x] \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - C(x) \sin x = 1$$

$$C'(x) \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1$$

$$C(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + K$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x) \cdot \sin x$ a získáme

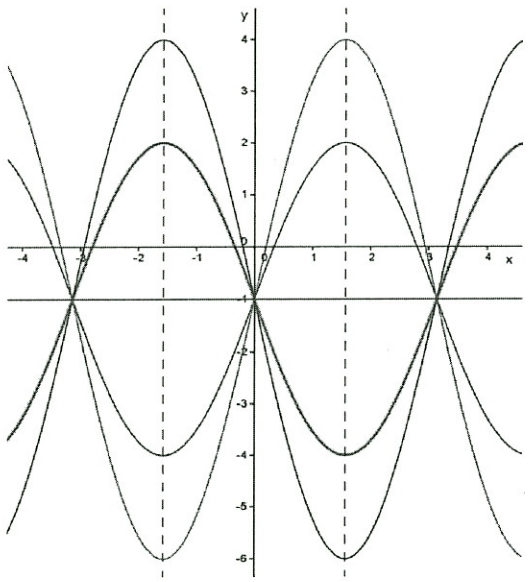
$$y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K\right) \cdot \sin x$$

$$y = K \cdot \sin x - 1$$

kde $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -5, -3, 0, 3, 5

obr (1d)



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

kde $u(t,c)$ je obecný tvar řešení příslušné homogenní rovnice a $w(t)$ je jedno partikulární řešení rovnice nehomogenní. Připomeňme, že $u(t,c) = c\exp(\int h(t)\mathrm{d}t)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice můžeme získat metodou *variace konstanty*. Uvedeme stručně princip této metody, která se používá i při řešení ostatních lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav.

Metoda variace konstanty je založena na tom, že existuje řešení nehomogenní rovnice, které má obdobné vyjádření jako má obecný tvar řešení homogenní rovnice $u(t,c)$, kde je konstanta c nahrazena vhodně zvolenou funkcí $c(t)$. Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t},\ t \in \mathcal{I}. \tag{4.3}$$

Dosazením do nehomogenní rovnice dostaneme rovnici

$$c'(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + c(t)h(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} = h(t)c(t)\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + q(t)$$

a odtud získáme podmínku pro neznámou funkci $c(t)$ ve tvaru

$$c'(t) = q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}.$$

Je tedy

$$c(t) = \int q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

a tudíž

$$x(t) = x(t,c) = c\mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\int h(t)\mathrm{d}t}\left(\int q(t)\mathrm{e}^{-\int h(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right),\ t \in \mathcal{I}. \tag{4.4}$$

V neurčitých integrálech ve vzorci volíme jednu z primitivních fukcí. Obecnost řešení je zohledněna v konstantě c.

Řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = h(t)x + q(t),\ x(\tau) = \xi$$

můžeme zapsat obdobným vzorcem. Za primitivní funkce volíme funkce horní meze s počáteční mezí τ. Dostaneme vzorec pro řešení ve tvaru

$$x(t) = x(t;\tau,\xi) = \xi\mathrm{e}^{\int_\tau^t h(s)\mathrm{d}s} + \int_\tau^t \mathrm{e}^{\int_s^t h(r)\mathrm{d}r}q(s)\mathrm{d}s,\ t \in \mathcal{I}. \tag{4.5}$$

První sčítanec je řešením homogenní rovnice s počáteční podmínkou $x(\tau) = \xi$ a druhý je řešením nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.

Řešené úlohy k odstavci 4.

1e)

1. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -\frac{3}{t}x + \frac{2}{t^3},\quad x(1) = 3.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)).

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = -\frac{3}{t}x,\ t \in (0,\infty) \text{ nebo } t \in (-\infty,0),$$

(1e)

tedy pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = -\int \frac{3}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|u(t)| = -3\ln|t| + \ln c^*,$$

tedy

$$u(t,c) = \frac{c}{t^3},\ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, \infty).$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = \frac{c(t)}{t^3},\ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, \infty).$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = \frac{c(t)}{t^3},\ w'(t) = \frac{c'(t)}{t^3} - 3\frac{c(t)}{t^4} \Rightarrow$$

$$\frac{c'(t)}{t^3} - 3\frac{c(t)}{t^4} = -\frac{3}{t}\frac{c(t)}{t^3} + \frac{2}{t^3} \Rightarrow c'(t) = 2 \Rightarrow c(t) = 2t,$$

tedy

$$w(t) = \frac{2}{t^2},\ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, \infty).$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = \frac{c}{t^3} + \frac{2}{t^2},\ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, \infty).}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme podmínku:

$$t = 1 \text{ a } x = 3 \Rightarrow 3 = c + 2 \Rightarrow c = 1.$$

Je tedy

$$\underline{x(t) = x(t; 1, 3) = \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^2},\ t \in (0, \infty).}$$

2. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = x\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t},\quad x(0) = 2.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)). Funkce $\operatorname{tg} t$ a $\frac{1}{\cos t}$ jsou spojité v intervalech $((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, k je celé číslo, a v nich bude mít rovnice řešení.

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = x\operatorname{tg} t,$$

pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = \int \operatorname{tg} t\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|u(t)| = -\ln|\cos t| + \ln c^* = \ln\frac{c^*}{|\cos t|}$$

tedy

$$u(t,c) = \frac{c}{\cos t},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo.}$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = \frac{c(t)}{\cos t}.$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = \frac{c(t)}{\cos t},\ w'(t) = \frac{c'(t)}{\cos t} + \frac{c(t)\sin t}{\cos^2 t},$$

$$\frac{c'(t)}{\cos t} + \frac{c(t)\sin t}{\cos^2 t} = \frac{c(t)}{\cos t}\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t} \Rightarrow c'(t) = 1$$

tedy

$$c(t) = t \Rightarrow w(t) = \frac{t}{\cos t},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo.}$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = \frac{c}{\cos t} + \frac{t}{\cos t}},\ t \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}),\ k \text{ je celé číslo.}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme z počáteční podmínky

$$t = 0,\ x = 2 \Rightarrow 2 = c$$

je tedy

$$\underline{x(t) = x(t;0,1) = \frac{2+t}{\cos t},\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).}$$

(1f)

3. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = x + \mathrm{e}^t, \quad x(2) = -3.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí tvaru (4.1) a její řešení má tvar (4.2), kde funkci $u(t)$ určíme postupem z odst. 3, (vzorec (3.2)) a funkci $w(t)$ metodou variace konstanty z odst. 4, (vzorec (4.3)). Rovnice je ovšem také lineární diferenciální rovnicí s konstantním koeficientem tvaru (5.1) se speciální pravou stranou tvaru (5.4). Řešení homogenní rovnice je dáno vzorcem (5.2) a funkci $w(t)$ lze najít odhadem podle (5.7). Zde uvedeme obecný postup řešení a můžete jej porovnat s úlohami v odstavci 5.

Příslušná homogenní rovnice je

$$x' = x,\ t \in \mathrm{R},$$

pro její řešení $u(t)$ platí:

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t \Rightarrow \ \ln|u(t)| = t + \ln c^*,$$

tedy

$$u(t,c) = c\mathrm{e}^t,\ t \in \mathrm{R}.$$

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat podle (4.3) ve tvaru

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^t,\ t \in \mathrm{R}.$$

Po dosazení za $w(t)$ a $w'(t)$ do řešené rovnice dostaneme:

$$w(t) = c(t)\mathrm{e}^t,\ w'(t) = c'(t)\mathrm{e}^t + c(t)\mathrm{e}^t,$$

(1f)

$$c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t + e^t \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c(t) = t$$

tedy

$$w(t) = te^t \in \mathrm{R}.$$

Dosazením do vzorce (4.2) dostaneme vzorec pro obecné řešení

$$\underline{x(t,c) = ce^t + te^t,\ t \in \mathrm{R}.}$$

Pro řešení příslušné Cauchyovy úlohy dostaneme z počáteční podmínky

$$t = 2,\ x = -3 \Rightarrow -3 = ce^2 + 2e^2 \Rightarrow c = -3e^{-2} - 2$$

je tedy

$$\underline{x(t) = x(t; 2, -3) = (t - 3e^{-2} - 2)e^t,\ t \in \mathrm{R}.}$$

Neřešené úlohy k odstavci 4.

1. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -\frac{4t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}, \quad x(0) = -3.$$

$$[x(t,c) = \tfrac{c}{(t^2+1)^2} + \tfrac{t^3+t}{3(t^2+1)^2},\ x(t) = x(t;0,-3) = \tfrac{-3}{(t^2+1)^2} + \tfrac{t^3+t}{3(t^2+1)^2},\ t \in \mathrm{R}]$$

2. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -2tx + 2te^{-t^2}, \quad x(1) = 4.$$

$$[x(t,c) = ce^{-t^2} + t^2e^{-t^2},\ x(t) = x(t;1,4) = (4e - 1 + t^2)e^{-t^2},\ t \in \mathrm{R}]$$

3. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{2}{t}x + \frac{t-1}{t}, \quad x(1) = 5.$$

$[x(t,c) = ct^2 + \tfrac{1}{2} - t,\ t \in (0,\infty)$ nebo $t \in (-\infty,0),\ x(t) = x(t;1,5) = \tfrac{11}{2}t^2 + \tfrac{1}{2} - t,\ t \in (0,\infty)]$

4. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = -t^2x + t^2, \quad x(0) = 1.$$

$$[x(t,c) = 1 + ce^{-\frac{1}{3}t^3},\ x(t) = x(t;0,1) = 1,\ t \in (-\infty,\infty)]$$

5. *Úloha:* Určete obecný tvar řešení rovnice a řešení Cauchyovy úlohy

$$x' = \frac{1}{t}x + \frac{3}{t}, \quad x(1) = 2.$$

$[x(t,c) = \tfrac{c}{t} + 3,\ t \in (-\infty,0)$ nebo $(0,\infty),\ x(t) = x(t;1,2) = 3 - \tfrac{1}{t},\ t \in (0,\infty)]$

$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C$

Řešení upravíme využitím pravidla o skládání vzájemně inverzních funkcí a pravidel pro počítání s logaritmy:

$\ln|y| = \ln e^{-\int P(x)\,dx} + \ln C$

$\ln|y| = \ln Ce^{-\int P(x)\,dx}$

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \tag{2}$$

což je předpokládaný tvar řešení. Je to část řešení, která odpovídá zkrácené rovnici.

Je zřejmé, že výjimečné řešení lineární diferenciální rovnice nemá, protože řešení $y = 0$ (vyplývající z podmínky $y \neq 0$) dostaneme dosazením za $C = 0$ do vztahu (2).

Pravou stranu $Q(x)$ do řešení zabudujeme následujícím postupem.

II. Druhý krok se nazývá variace (změna) konstanty. V obecném řešení (2) bude místo konstanty C funkce proměnné x: $C = C(x)$

Dosadíme za ni do (2): $y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

Derivujeme součin: $y' = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}.(-P(x))$

Za y a y' dosadíme do zadání:

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}(-P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně musí vyrušit, zůstává pouze sčítanec s derivací $C'(x)$.

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$, upravíme $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$

a odtud vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (2):

$\boxed{y = (\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + K)e^{-\int P(x)\,dx}}$.

(1g) *Příklad 7.10:* Vyřešte diferenciální rovnici $y' - \dfrac{5y}{x} = x^2, \quad x \neq 0$.

Řešení: Budeme dodržovat výše uvedený postup I. – III. uvedený v 7.2.4:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' - \dfrac{5y}{x} = 0$,

která je vždy separovatelná. Vyřešíme ji proto postupem uvedeným v 7.2.2.

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5y}{x} \quad |dx$

$dy = \dfrac{5y}{x}dx \quad |\dfrac{1}{y}, \quad y \neq 0$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{5}{x}dx$

$$\int \frac{dy}{y} = 5\int \frac{1}{x}\,dx$$

(1g)

$$\ln|y| = 5\ln|x| + \ln C$$

Řešení upravíme využitím pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\ln|y| = \ln\left|x^5\right| + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln C\left|x^5\right|$$

$$y = Cx^5, \tag{3}$$

což je předpokládaný tvar řešení. Je to část řešení, která odpovídá levé straně rovnice.
Je zřejmé, že výjimečné řešení lineární diferenciální rovnice nemá, protože řešení $y = 0$ (vyplývající z podmínky $y \neq 0$) dostaneme dosazením za $C = 0$ do vztahu (3).

Pravou stranu $Q(x) = x^2$ do řešení zabudujeme následujícím postupem.

II. Druhý krok se nazývá variace (změna) konstanty. Obecné řešení (3) bude mít místo konstanty C funkci proměnné x: $C = C(x)$.

Dosadíme za ni do (3): $y = C(x).x^5$,

derivujeme součin: $y' = C'(x)x^5 + C(x).5x^4$.

Za y a y' dosadíme do zadání $C'(x)x^5 + C(x).5x^4 - \dfrac{5C(x)x^5}{x} = x^2$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně musí odečíst, zůstává pouze sčítanec s derivací $C'(x)$: $C'(x)x^5 = x^2$,

upravíme $C'(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$

a odtud vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int C'(x)\,dx = \int x^{-3}dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} + K = -\dfrac{1}{2x^2} + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (3):

$y = (-\dfrac{1}{2x^2} + K)x^5$, po úpravě $\boxed{y = Kx^5 - \dfrac{x^3}{2}}$.

$x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, \infty)$

Je zřejmé, že obecné řešení tvoří dvě části: $y = y_0 + \hat{y}$,

kde $y_0 = Kx^5$ je řešení zkrácené rovnice,

$\hat{y} = -\dfrac{x^3}{2}$ je partikulární integrál odpovídající pravé straně $Q(x)$.

Příklad 7.11: Vyřešte diferenciální rovnici $y' + xy = x$, platí-li $y(0) = 4$.

Řešení: Budeme dodržovat uvedený postup I. – III. uvedený v příkladu 7.10:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' + xy = 0$, která je vždy separovatelná, postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad \Big| dx$$

Poznámka: Uvedený příklad $y' + xy = x$ vyřešíme i jiným postupem:

Stačí, když provedeme jednoduchou úpravu $y' = x - xy \quad \Rightarrow \quad y' = x(1-y)$.

Získáme separovatelnou rovnici, kterou vyřešíme postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y) \quad \Big| dx$$

$$dy = x(1-y)dx \quad \Big| \frac{1}{1-y}, \quad y \neq 1$$

$$\frac{dy}{1-y} = x\,dx$$

$$-\int \frac{-dy}{1-y} = \int x\,dx$$

$-\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + \ln C$, což je obecné řešení, které můžeme (ale nemusíme) dále upravit:

$$\ln\left|(1-y)^{-1}\right| = \ln e^{\frac{x^2}{2}} + \ln C$$

$$(1-y)^{-1} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{1-y} = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad 1-y = \frac{1}{Ce^{\frac{x^2}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1 + Ke^{-\frac{x^2}{2}}}, \qquad \text{kde} \quad K = -\frac{1}{C}$$

Z tohoto příkladu je zřejmé, že diferenciální rovnice nemusí být pouze jednoho typu. Pokud splňuje současně podmínky pro více typů, volíme vždy jednodušší postup řešení (v uvedeném příkladě je to řešení separovatelné diferenciální rovnice).

(12) *Příklad 7.12:* Vyřešte diferenciální rovnici $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3, \quad x \neq -1$, platí-li $y(1) = -1$.

Řešení: Budeme dodržovat uvedený postup I – III uvedený v příkladu 7.10:

I. Vyřešíme příslušnou zkrácenou rovnici $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0$,

která je vždy separovatelná, postupem uvedeným v 7.2.2.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y}{1+x^3} \quad \Big| dx$$

$$dy = \frac{3x^2y}{1+x^3}dx \quad \Big| \frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$\ln|y| = \ln\left|1+x^3\right| + \ln C$$

Řešení upravíme využitím pravidel pro počítání s logaritmy:

$\ln|y| = \ln C\left|1 + x^3\right|$

$y = C(1 + x^3)$, což je předpokládaný tvar řešení. (5)

II. Integrační konstantu C budeme považovat za funkci proměnné x: $C = C(x)$

Dosadíme za ni do (5): $y = C(x).(1 + x^3)$

Derivujeme součin: $y' = C'(x).(1 + x^3) + C(x).3x^2$

Za y a y' dosadíme do zadání: $C'(x).(1 + x^3) + 3C(x).x^2 - \dfrac{3x^2C(x).(1 + x^3)}{1 + x^3} = 1 + x^3$

Následuje kontrolní krok: sčítance s $C(x)$ se vzájemně vyruší, zůstává pouze sčítanec s derivací $C'(x)$: $C'(x).(1 + x^3) = 1 + x^3$, po vykrácení $C'(x) = 1$

a vypočítáme integrační konstantu $C(x) = \int C'(x)\, dx = \int 1\, dx = x + K$.

III. Obecné řešení zadané lineární diferenciální rovnice získáme dosazením vypočítané konstanty do předpokládaného tvaru řešení (5): $\boxed{y = (x + K)(1 + x^3)}$. $x \in (-\infty, -1)$

$x \in (-1, \infty)$

Z podmínky $y(1) = -1$ vyplývá, že hledáme partikulární řešení, které prochází bodem P[1,-1]. Po dosazení do obecného řešení vypočítáme hodnotu integrační konstanty:

$-1 = (1 + K)(1 + 1^3)$ a odtud vypočítáme $K = -\dfrac{3}{2}$.

Partikulární řešení: $y = (x - \dfrac{3}{2})(1 + x^3)$, po úpravě $\boxed{y = x^4 - \dfrac{3}{2}x^3 + x - \dfrac{3}{2}}$.

Poznámka: Existuje řada dalších typů diferenciálních rovnic I. řádu, které nejsou zařazeny do tohoto stručného přehledu.

7.3. Diferenciální rovnice II. řádu

Ve stručném přehledu se budeme zabývat výhradně řešením lineárních diferenciálních rovnic II. řádu s konstantními koeficienty.

Obecný tvar: $\boxed{a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)}$, kde $a_2 \neq 0, a_1,\ a_0$ jsou reálné konstanty.

Dělíme je do dvou typů: zkrácená pro $Q(x) = 0$: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

úplná pro $Q(x) \neq 0$: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)$

Řešením lineárních diferenciálních rovnic II. řádu se zabýval švýcarský matematik Leonhard Euler.

7.3.1. Zkrácená rovnice

$\boxed{a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0}$

Euler zjistil, že řešení má tvar $y = e^{rx}$, kde r je konstanta, zvaná charakteristický kořen.

Pro derivace platí $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$.

Dosadíme do zadání $a_2r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0$, *Řešení:* Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y &= xy' \,, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \,, \\
\ln|y| &= \ln|x| + C_1 \,, \\
y &= cx \,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y &= c(x)x \,, \\
c(x)x &= xc'(x)x + xc(x) - x^2 \cos x \,, \\
c'(x) &= \cos x \,, \\
c(x) &= \sin x + c_2 \,, \\
y(x) &= (c_2 + \sin x)x \,.
\end{aligned}
$$

(1i)

Příklad 3.3. *Řešte rovnici* $xy' + (x+1)y = 3x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, \infty)$

$$
\begin{aligned}
xy' + (x+1)y &= 0 \,, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \,, \\
\ln|y| &= -x - \ln x + c_1 \,, \\
y(x) &= \mathrm{e}^{-x} \frac{c}{x} \,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{c(x)}{x} \mathrm{e}^{-x} \,, \\
c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{c(x)}{x}\mathrm{e}^{-x} + c\mathrm{e}^{-x} + \frac{c}{x}\mathrm{e}^{-x} &= 3x^2 \mathrm{e}^{-x} \,, \\
c'(x) = 3x^2 \quad &\Rightarrow \quad c(x) = x^3 + c_2 \,, \\
y(x) &= \left(x^2 + \frac{c_2}{x}\right) \mathrm{e}^{-x} \,.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.4. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Řešení: Rovnici si upravíme do tvaru

$$
\frac{3x - y^2}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \,,
$$

což odpovídá rovnici

$$
x'(y) = \frac{3x}{y} - y \,.
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-x^2} + c(x)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xc(x)\mathrm{e}^{-x^2} &= 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,,\\
c'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^2 + c_2\,,\\
y(x) &= (x^2 + c_2)\mathrm{e}^{-x^2}\,.
\end{aligned}
$$

(1j) **Příklad 3.7.** *Řešte rovnici $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$.*

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
xy' + 2y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2}{x}\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -2\ln|x| + c_1\,,\\
y &= \frac{c}{x^2}\,.
\end{aligned}
$$

$x \in (-\infty, 0)$

$x \in (0, \infty)$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{c(x)}{x^2}\,,\\
x\frac{c'(x)}{x^2} + (-2)x\frac{c(x)}{x^3} + \frac{2c(x)}{x^2} &= 3x\,,\\
c'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^3 + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{c_2}{x^2} + x\,.
\end{aligned}
$$

Z počáteční podmínky

$$
c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x\,.
$$

(12) **Příklad 3.8.** *Řešte rovnici $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$.*

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + y\cos x &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \cos x \mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -\sin x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-\sin x}\,.
\end{aligned}
$$

(11)

Variace konstanty:

$$y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\,,$$
$$c'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + (-\cos x)c(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\cos x = \sin x \cos x\,,$$
$$c'(x) = \sin x \cos x \mathrm{e}^{\sin x}\,,$$
$$c(x) = \int \sin x \cos x \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (At + B)\mathrm{e}^t\,,$$
$$A + At + B = t \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = -1\,,$$
$$c(x) = (t-1)\mathrm{e}^t + c_2 = (\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + c_2\,,$$
$$y(x) = \sin x - 1 + c_2\mathrm{e}^{-\sin x}\,,$$
$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 2\,,$$
$$y(x) = \sin x - 1 + 2\mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

(12)

Příklad 3.9. *Řešte rovnici* $(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$.

Řešení: Homogenní rovnice:

pro $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$

$$(1-x^2)y' + xy = 0\,,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c_1\,,$$
$$y(x) = c\sqrt{|x^2-1|}\,.$$

Řešení proto budeme uvažovat ve tvaru (pro výraz uvnitř odmocniny bereme v úvahu počáteční podmínku) $y(x) = c(x)\sqrt{1-x^2}$. Variace konstanty:

$$(1-x^2)c'(x)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)c(x)\frac{1/2(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} + xc(x)\sqrt{1-x^2} = 1\,,$$
$$c'(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,.$$
$$c(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = |x = \sin t\,,\quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t| = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left|u = \operatorname{tg} t\,,\quad \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\right| = \int \mathrm{d}u = u + c_1 =$$
$$= \left|\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c_1\,.$$
$$c(x) = x(1-x^2)^{-1/2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x + c_1\sqrt{1-x^2}\,.$$

*

Z počáteční podmínky:

$$1 = c_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

* nelze slepit :((nelze spoj. dodef)

(1m) **Příklad 3.10.** *Řešte rovnici* $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$.

$x \neq k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

Řešení: Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y' - y\frac{\cos x}{\sin x} &= 0\,, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,, \\ \ln|y| &= \ln|\sin x| + c_1\,, \\ y &= c\sin x\,. \end{aligned}$$

Variace konstanty:

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)\sin x\,, \\ c'(x)\sin x + c(x)\cos x - c(x)\cos x &= 2\sin x\,, \\ c(x) &= \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + c_2\,, \\ y(x) &= (2x + c_2)\sin x\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.11. *Řešte rovnici* $y' + xy = x$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0\,, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int x\,\mathrm{d}x\,, \\ \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + c_1\,, \\ y &= c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Variace konstanty:

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,, \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - c(x)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} &= x\,, \\ c'(x) &= x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,, \\ c(x) = \int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \left| u = \frac{x^2}{2}, \quad \mathrm{d}u = x\mathrm{d}x \right| = \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u &= \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + c_2\,, \\ y(x) &= 1 + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.12. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y-1}{x(x-1)}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x(x-1)}\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\frac{x-1}{x} + c_1\,,\\
y &= c\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\frac{x-1}{x}\,,\\
c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-1}{x}\right)' &= \frac{c(x)}{x^2} - \frac{1}{(x-1)x}\,,\\
c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)' &= \frac{c(x)}{x^2} - \frac{1}{(x-1)x}\,,\\
c'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}\,,\\
c(x) &= \frac{1}{x-1} + c_2\,,\\
y(x) = \frac{1}{x} + c_2\frac{x-1}{x} &= 1 + c_3\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}
$$

(1h) **Příklad 3.13.** *Řešte rovnici* $y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + 3y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 3\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -3x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-3x}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-3x}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-3x} + c(x)\mathrm{e}^{-3x}(-3) + 3c(x)\mathrm{e}^{-3x} &= \mathrm{e}^{2x}\,,\\
c'(x) &= \mathrm{e}^{5x}\,,\\
c(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}\,.
\end{aligned}
$$

(1b) **Příklad 3.14.** *Řešte rovnici* $y' + y = \cos x$.

(1c)

Řešení: Homogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
y' + y &= 0\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 1\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -x + c_1\,,\\
y &= c\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-x}\,,\\
c'(x)\mathrm{e}^{-x} + c(x)\mathrm{e}^{-x}(-1) + c(x)\mathrm{e}^{-x} &= \cos x\,,\\
c(x) = \int \mathrm{e}^{x}\cos x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}(\sin x + \cos x) + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

(1p)

Příklad 3.15. *Řešte rovnici* $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

Řešení: Homogenní rovnice:

$x \neq -1$

$$
\begin{aligned}
xy' &= \frac{y}{x+1}\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c_1\,,\\
y &= c\frac{x}{x+1}\,.
\end{aligned}
$$

pro $x \in (-\infty, -1)$
$(-1, 0)$
$(0, \infty)$

Variace konstanty:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\frac{x}{x+1}\,,\\
xc'(x)\frac{x}{x+1} + c(x)x\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{c(x)x}{(x+1)^2} &= x\,,\\
c'(x) = \frac{x+1}{x} &= 1 + \frac{1}{x}\,,\\
c(x) &= x + \ln|x| + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + c_2)\,.
\end{aligned}
$$

slepit v 0 nelze

Příklad 3.16. *Řešte rovnici* $(2\mathrm{e}^{y} - x)y' = 1$.

Řešení: Použijeme triku, že hledáme řešení $x(y)$ jako funkce od y.

$$x' = -x + 2\mathrm{e}^{y}\,.$$

Cvičení 1

LINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

(1q) **1.** Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x \operatorname{tg} t = \cos^2 t$, které vyhovuje podmínce $x(2\pi) = 2$.
Řešení:
Máme nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = \operatorname{tg} t$ a $q(t) = \cos^2 t$ jsou definované a spojité v intervalech $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je počáteční podmínka definována v bodě $t_0 = 2\pi$. Budeme hledat řešení v intervalu $t \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$.
Nejprve určíme řešení příslušné homogenní rovnice

$$u' + u \operatorname{tg} t = 0 .$$

To je $u(t) = C \cos t$. Jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme variací konstanty. Řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t) \cos t$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(t) = \cos t$, neboli $C(t) = \sin t$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je $x(t) = C \cos t + \sin t \cos t$. Z podmínky $x(2\pi) = 2$ plyne, $C = 2$. Řešení Cauchyovy úlohy je tedy

$$x(t) = (2 + \sin t) \cos t \quad \text{pro} \quad t \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right).$$

(1r) **2.** Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2tx = t - t^3$, které vyhovuje podmínce $x(1) = 1$.
Řešení:
Máme najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Proto nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $u' = 2tu$. Standardním způsobem získáme její řešení $u = C\mathrm{e}^{t^2}$. Řešení nehomogenní rovnice $w(t)$ získáme variací konstanty, tj. předpokládáme, že $w(t) = C(t)\mathrm{e}^{t^2}$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $C'(t) = (t - t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$, čili $C(t) = \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$. Tedy hledané řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = \frac{t^2}{2}$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je $x(t) = C\mathrm{e}^{t^2} + \frac{t^2}{2}$. Z počáteční podmínky plyne rovnost $x(1) = 1 = C\mathrm{e} + \frac{1}{2}$. Tedy $C = \frac{1}{2\mathrm{e}}$. Když dosadíme tuto konstantu do obecného řešení, získáme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2-1} + t^2}{2}.$$

(1s) **3.** Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \frac{2x}{t^2-1} = t$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 1$.
Řešení:
Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = -\frac{2}{t^2-1}$ a $q(t) = t$ jsou definované a spojité v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$. Protože počáteční podmínka je dána v bodě $t_0 = 0$, který leží v intervalu $(-1, 1)$, budeme hledat řešení rovnice v tomto intervalu.
Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $u' + \frac{2u}{t^2-1} = 0$. Standardní metodou dostaneme

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(15)

a po integraci získáme $u(t) = C\,\dfrac{1+t}{1-t}$.

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t)\,\dfrac{1+t}{1-t}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(t) = \frac{t(1-t)}{1+t} = -t + 2 - \frac{2}{1+t}, \quad \text{neboli} \quad C(t) = -\frac{1}{2}\,(2-t)^2 - 2\ln(1+t)\,.$$

Partikulární řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice je tedy $w(t) = \dfrac{1+t}{1-t}\left(-\dfrac{(t-2)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right)$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(C - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right).$$

Z podmínky $x(0) = 1 = C - 2$ plyne, že $C = 3$, a tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(3 - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right) \quad \text{pro} \quad t \in (-1,1)\,.$$

---

4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2x = t^2$, které vyhovuje podmínce $x(-1) = 0$.
Řešení:
Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Tato rovnice je speciálního typu. Funkce $h(t) = 2$ je konstantní. Proto lze hledat řešení příslušné homogenní rovnice $u' - 2u = 0$ ve tvaru $u = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do homogenní rovnice, dostaneme $\lambda - 2 = 0$, která se nazývá *charakteristická rovnice*. Její řešení je $\lambda = 2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = C\mathrm{e}^{2t}$.
Také partikulární řešení nehomogenní rovnice lze v tomto případě najít bez integrace. Protože pravá strana $q(t) = t^2$ je polynom stupně 2 a $\mu = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, lze partikulární řešení nehomogenní rovnice hledat ve tvaru $w = at^2 + bt + c$, kde a, b a c jsou konstanty. Dosazením do původní rovnice a srovnáním koeficientů u různých mocnin proměnné t, dostaneme soustavu rovnic $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$ a $b - 2c = 0$, která má řešení $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ a $c = -\dfrac{1}{4}$. Proto je partikulární řešení nehomogenní rovnice rovno $w(t) = -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$ a její obecné řešení je $x(t) = C\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$.
Z počáteční podmínky plyne $x(-1) = 0 = C\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{1}{4}$, tedy $C = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. Z toho dostáváme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2(t+1)} - 2t^2 - 2t - 1\right).$$

---

5. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 4x = t\mathrm{e}^{-4t} + 4t - 3$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 2$.
Řešení:
Máme opět řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda + 4 = 0$ má řešení $\lambda = -4$, a tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = C\mathrm{e}^{-4t}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, kde $w_1(t)$ je partikulární řešení rovnice $w_1' + 4w_1 = t\mathrm{e}^{-4t}$ a w_2 je partikulární řešení rovnice $w_2' + 4w_2 = 4t - 3$. Protože $\mu = -4$ je řešením charakteristické rovnice, budeme hledat funkci w_1 ve tvaru $w_1(t) = t(at+b)\mathrm{e}^{-4t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do rovnice pro w_1, dostaneme po srovnání koeficientů u různých mocnin proměnné t soustavu rovnic $2a = 1$ a $b = 0$. Tedy $w_1(t) = \dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-4t}$. Funkci w_2 budeme hledat ve tvaru $w_2(t) = At + B$, protože $\mu = 0$ není řešení

(2)
(a) $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$ $\qquad x \neq 0$

- $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

$\ln|y| = -\ln x + k$

$|y| = e^k \cdot e^{\ln \frac{1}{x}}$

$y = k \cdot \frac{1}{x}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

- $k' \cdot \frac{1}{x} + k \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot k \frac{1}{x} = e^{x^2}$

$k' = x e^{x^2}$ $\qquad$ subst.

$k = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

- $y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right)$

(b)

$$y' - y\ln x = x^{x+1} \qquad x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x} \qquad \boxed{x>0}$$

- $y = y\ln x$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \ln x\,dx$$ Per partes

$$\ln|y| = x\ln x - x + k$$

$$|y| = e^{\ln x^x - x + k}$$

$$\underline{y = k\,e^{-x}\cdot x^x}$$

- $y_p = k(x)\,e^{-x}\cdot x^x = k\,e^{-x}e^{x\ln x}$

$$k' e^{-x}x^x + k\left(-e^{-x}x^x + e^{-x}x^x\cdot(\ln x + 1)\right) - k\,e^{-x}x^x\ln x = x^{x+1}$$

$$\underline{k' e^{-x}x^x = x^{x+1}}$$

$$k' = e^x\cdot x \qquad \text{per partes}$$

$$\underline{k = e^x x - e^x + c}$$

celkem $\quad \underline{y = (e^x x - e^x + c)\,e^{-x}\cdot x^x \qquad x\in(0,\infty)}$

(c)

$xy' - 2y = 2x^4$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

- $y' - 2y \cdot \frac{1}{x} = 2x^3$ $\qquad x \neq 0$

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$

$\ln|y| = 2\ln x + k$

$\underline{y = k x^2}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

- $k' x^2 + k \cdot 2x - 2 k x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x^3$ $\qquad x > 0$

$k' = 2x$

$k = x^2 + c_1$

- $y = (x^2 + c_1) x^2$ $\qquad x > 0$

- pro $x < 0$ dostaneme

$y = (x^2 + c_2) x^2$

- v 0 lze slepit,

$$y = \begin{cases} x^2(x^2 + c_2) & x \in (-\infty, 0) \\ x^2(x^2 + c_1) & x \in [0, \infty) \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

máme v 0 derivaci? Lze přímo upočítat, fce je spoj.

$y'_+ = \lim_{x \to 0+} 4x^3 + 2c_1 x = 0$

$y'_- = \lim_{x \to 0-} 4x^3 + 2c_2 x = 0$

Všechno ok

(d)

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$$

- $\frac{y'}{y} = -3x^2$

$\ln|y| = -x^3 + c$

$y = e^{-x^3} \cdot k \quad k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- $e^{-x^3} \cdot k' + k e^{-x^3}(-3x^2) + 3x^2 k e^{-x^3} = e^{-x^3+x} \sin x$

$k' = e^x \sin x \qquad$ 2x per partes

$k = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$

$y = e^{-x^3}\left(\frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + c\right) \qquad x, c \in \mathbb{R}$

(e)

$$y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$$

$$y' + \frac{y}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2 \qquad x \in (-\infty, 0) \quad x \in (0, \infty)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{\arctan x\,(1+x^2)}$$

$$\ln|y| = -\ln|\arctan x| + k$$

$$y = k\,\frac{1}{\arctan x} \qquad x \neq 0$$

$$k'\frac{1}{\arctan x} + k\,\frac{-1}{\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{k\,\frac{1}{\arctan x}}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2$$

$$k' = x^2 \arctan x$$

per partes

$$\int x^2 \arctan x = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{2x^3}{2(1+x^2)}\,dx$$

$u' = x^2 \qquad v = \arctan x \qquad u = 1+x^2$

celkem

$u = \frac{1}{3}x^3 \qquad v' = \frac{1}{1+x^2} \qquad du = 2x\,dx$

$$k = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}(u - \ln u)$$

$$y = \frac{1}{\arctan x}\left[\frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c\right]$$

$x \neq 0$

(f) $y' + \frac{x}{1+x^2} y = 1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

$$y = k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left(= k(1+x^2)^{-1/2}\right)$$

$$k' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x + \frac{xk}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$k' = \sqrt{1+x^2}$$

buď spec. subst. $y = \sinh x$

nebo Euler. subst.

$t = \sqrt{x^2+1} + x$

máme

$$\int \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$$

pak (z tabulky) $x = \frac{t^2-1}{2t}$

$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t}$

$$= \int \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t^2} dt$$

a $dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2-1) \cdot 2}{4t^2} dt$

$$= \int \frac{(t^2+1) \cdot (t^2+1)}{4t^3} dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \ln t + \frac{-1}{2t^2} \right) \rightsquigarrow$$

$$k = \underbrace{\frac{1}{8} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + x)^2} + c}$$

pak $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big[$ — " — $\Big]$

$x \in \mathbb{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)

LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \qquad \text{(10 bodů).}$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x\sin x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F5: Najděte všechna $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ taková, že maximální řešení $\boldsymbol{y}$ počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$$

splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}(t)}{t}e^{-t} = \boldsymbol{o}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2$, $x \in \mathbf{R}$, $c > 0$;

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \le 0,\ c_2 \le 0;$$

jiná substituce dá!

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2} - x)^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2\sin x + c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x-c) - x$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F5: $\left\{ k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$

Potom integrály typu $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ lze řešit *Eulerovou substitucí*

$$t = \sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}, \qquad \text{odkud} \qquad x = \frac{ax_1 - x_2t^2}{a-t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2a(x_1-x_2)t}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

3. *Kvadratický trojčlen ax^2+bx+c nemá reálný kořen.* Pokud kvadratický trojčlen ax^2+bx+c nemá žádné reálné kořeny, pak, aby odmocnina měla smysl, musí být $a>0$. Z neexistence kořenů navíc vyplývá, že $c>0$. Lze použít jedné z následujících dvou *Eulerových substitucí*

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}, && (1)\\ xt &= \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}. && (2) \end{aligned}$$

Například z první substituce lze vyjádřit, že

$$\begin{aligned} t \mp x\sqrt{a} &= \sqrt{ax^2+bx+c}\\ (t \mp x\sqrt{a})^2 &= ax^2+bx+c\\ t^2 \mp 2tx\sqrt{a} &= bx+c\\ x &= \frac{t^2-c}{b \pm 2t\sqrt{a}} \end{aligned}$$

a odtud máme, že

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp \frac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}}.$$

4. Existuje ještě jiná, v jednodušších případech častěji využívaná možnost, založená na transformaci kvadratického trojčlenu na kanonický tvar - *převodem na čtverec.*

$$= \int \frac{1}{a^2} \cos t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} \implies \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}.$$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int a^2\cosh^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\left(t + \cosh t \sinh t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2}a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \int a^2\sinh^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\left(\cosh t \sinh t - t\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}a^2 \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2}\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2}\sinh t}\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t = \int 2\cosh^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} (t + \sinh t \cosh t) =$$

$$= \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} \overset{C}{=} \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\sinh^2 t}{a\cosh t} a\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\left[t - \sinh t \cosh t\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2}a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$$

10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\cosh(x + y) &= \sinh(x) \cdot \sinh(y) + \cosh(x) \cdot \cosh(y) \\
\sinh(x + y) &= \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y) \\
\cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \\
\cosh(x) - \sinh(x) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

Chapter 3

Applications of first-order ODEs

Contents

3.1 Radioactivity and Carbon dating

There are three isotopes of Carbon: ^{12}C, ^{13}C and ^{14}C. Almost all Carbon is made up of the first two (^{12}C and ^{13}C) because ^{14}C is radioactive: it decays with a half-life of 5730 years to form ^{14}N. Although it decays quite quickly, it is constantly being produced in the upper atmosphere by the action of cosmic rays. The equilibrium level of ^{14}C is about 1 part per trillion (10^{12}).

When an organism dies, it ceases to absorb Carbon from the environment, so the amount of ^{14}C it contains will decrease as this decays radioactively. The time since the death of the organism can be estimated by measuring how much ^{14}C there is left.

Let $x(t)$ be the proportion of ^{14}C at time t. In a short interval δt, the concentration will decrease by an amount proportional to how much is left, and to the length of the time interval:

$$x(t + \delta t) = x(t) - kx(t)\delta t$$

where k is a positive constant. Rearranging:

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = -kx$$

and taking the limit of small δt (see chapter 1):

$$\frac{dx}{dt} = -kx \qquad \text{with } x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

We can solve this separable first-order ODE:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx &= -\int k\,dt + C\\ \log|x| &= -kt + C\\ |x| &= e^{C}e^{-kt}\end{aligned}$$

Use the fact that $x > 0$ and set $A = e^{C}$:

$$x = Ae^{-kt}$$

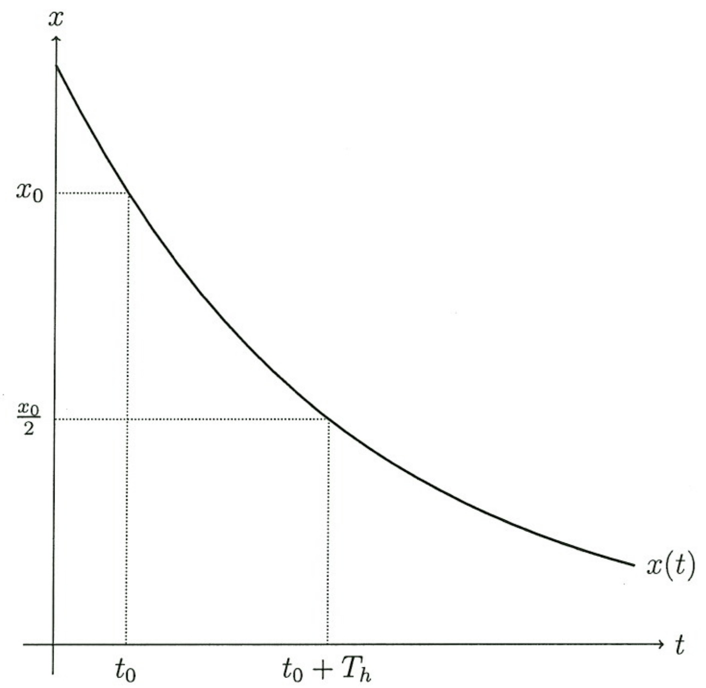
We can now use the initial condition $x(t_0) = x_0$ to find A:

$$x_0 = Ae^{-kt_0}, \qquad A = x_0e^{kt_0}$$

which results in the solution for $x(t)$:

$$x = x_0e^{-k(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

Graphically:



The **half-life** T_h is the time after which half of the ^{14}C has decayed. So, from (3.2), at time $t_0 + T_h$:

$$x(t_0 + T_h) = \frac{x_0}{2} = x_0e^{-k(t_0+T_h-t_0)} = x_0e^{-kT_h}.$$

or

$$T_h = \frac{1}{k}\log 2.$$

For ^{14}C, $T_h = 5730\,\text{years}$, so $k = \frac{1}{T_h}\log 2 = 0.000121/\text{year}$.

Example: A fossilised bone is found to contain 0.1% of its original ^{14}C. Find the age of the fossil.

Solution: Let t be today's date, and suppose the fossil is T years old, so it was fossilised at time $t_0 = t - T$. At this time it had x_0 ^{14}C, and now it has $0.001x_0$.

$$x(t) = 0.001x_0 = x_0 e^{-k(t-t_0)} = x_0 e^{-kT},$$

which we can solve for T:

$$T = -\frac{1}{k}\log 0.001 = \frac{1}{k}\log 1000 = 57100\,\text{years}.$$

Example: A nuclear breeder reactor produces waste that contains (amongst other things) the isotope ^{239}Pu (Plutonium-239). After 15 years, the initial concentration of ^{239}Pu in the waste has decreased by 0.043%. Find the half-life of the isotope.

Solution:

Example: A sample of thread contains 10^{10} atoms of ^{14}C. How many disintegrations per second will there be?

Solution: $\frac{dx}{dt} = -kx$, so there are 0.000121×10^{10} disintegrations per year, or 0.04 disintegrations per second.

6

FIGURE 3.2.2 Logistic curves for different initial conditions

number of individuals infected with the disease at time t.

EXAMPLE 1 Logistic Growth

Suppose a student carrying a flu virus returns to an isolated college campus of 1000 students. If it is assumed that the rate at which the virus spreads is proportional not only to the number x of infected students but also to the number of students not infected, determine the number of infected students after 6 days if it is further observed that after 4 days $x(4) = 50$.

SOLUTION Assuming that no one leaves the campus throughout the duration of the disease, we must solve the initial-value problem

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1.$$

By making the identification $a = 1000k$ and $b = k$, we have immediately from (5) that

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Now, using the information $x(4) = 50$, we determine k from

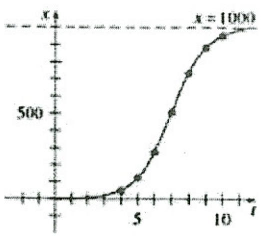
$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

We find $-1000k = \frac{1}{4}\ln\frac{19}{999} = -0.9906$. Thus

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Finally, $$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ students}.$$

Additional calculated values of $x(t)$ are given in the table in Figure 3.2.3(b). Note that the number of infected students $x(t)$ approaches 1000 as t increases.



(a)

t (days)	x (number infected)
4	50 (observed)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

(b)

FIGURE 3.2.3 Number of infected students in Example 1