9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).

V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (1) je třídy $\mathcal{C}^1$.

Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Algoritmus

1. Uvažujeme interval (a, b), na kterém dále pracujeme, a upravíme rovnici na lineární.
2. Najdeme řešení y_H homogenní rovnice pomocí separace proměnných, nezapomeneme na konstantu. (Vyjde $e^{P(x)+c}$, kde $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.)
3. Přepíšeme c na $c(x)$ - odteď je to funkce. Dosadíme do původní rovnice s pravou stranou.
4. Hodně se toho pokrátí, ze zbytku vyjádříme $c'(x)$ a spočteme $c(x)$. Tím najdeme y_P.
5. $y = y_H + y_P$ (Nebo prostě dosadíme za vyšlou konstantu.)
6. Je-li nutno, nalepíme.
7. Případně aplikujeme podmínky.

Hinty

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + y = e^x$

(b) $xy' - y = x^2$

(c) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

(d) $y'\mathrm{tg}\ x - y = 1$

(e) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 3$

(f) $y' = y + e^x$, $y(2) = -3$

(g) $y' - \frac{5y}{x} = x^2$

(h) $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3$, $y(1) = -1$

(i) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

(j) $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$

(k) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$

(l) $(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$

(m) $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$

(n) $y' + 3y = e^{2x}$

(o) $y' + y = \cos x$

(p) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

(q) $y' + y\mathrm{tg}\ x = \cos^2 x$, $y(2\pi) = 2$

(r) $y' - 2yx = x - x^3$, $y(1) = 1$

(s) $y' + \frac{2y}{x^2-1} = x$, $y(0) = 1$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$

(b) $y' - y\ln x = x^{x+1}$

(c) $xy' - 2y = 2x^4$

(d) $y' + 3x^2y = e^{-x^3+x}\sin x$

(e) $y'(1+x^2) + \frac{y}{\text{arctan } x} = x^2(1+x^2)$

(f) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

Bonus

3. Je nalezena zkamenělá kost, u které se podařilo určit, že obsahuje 0.1% hmotnosti C-14, než kterou obsahovala původně. Určete stáří fosilie, víte-li, že poločas rozpadu C-14 je 5730 let.

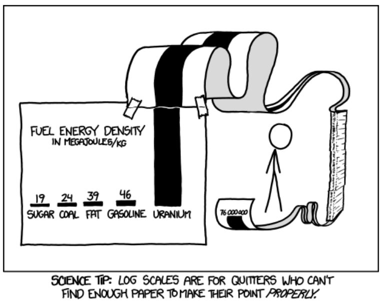

Figure 1: https://www.xkcd.com/1162/

4. Do uzavřeného školního kampusu o 1000 studentech přijel jeden z nich s chřipkou. Předpokládejme, že rychlost šíření infekce závisí jak na množství již nakažených studentů, tak na množství dosud zdravých. Určete množství studentů nakažených 6. den pokud víte, že po čtyřech dnech bylo nakaženo již 50 studentů. (Odpovídající diferenciální rovnice: $y' = ky(1000-y)$, $y(0) = 1$, $y(4) = 50$.)