1a

Příklad 1.3.16.

Řešte následující počáteční problém

$$y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} = x,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' = x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(0) = \frac{1}{2}$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(0) = (C + 0) \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

tedy $C = \frac{1}{2}$ a řešení počátečního problému je

$$y = \frac{x^2 + 1}{2\,\mathrm{e}^{x^2}}.$$

▲

15

Příklad 1.3.3.

Řešte následující rovnici

$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -4x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1\,\mathrm{d}x = x^2+x+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = (x^2+x+C)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1c

Příklad 1.3.5.

Řešte následující rovnici

$$y'x + y = x \ln x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + \frac{y}{x} = \ln x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$. Dostaneme rovnici

$$y'x + y = x \ln x,$$

tedy

$$(yx)' = x \ln x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$yx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1el

Příklad 1.3.7.

Řešte následující rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + 3y = x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int 3 dx} = e^{3x}$. Dostaneme rovnici

$$y' e^{3x} + 3y e^{3x} = x e^{3x},$$

tedy

$$\left(y e^{3x}\right)' = x e^{3x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y e^{3x} = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + C e^{-3x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1e

Příklad 1.3.8.

Řešte následující rovnici

$$y' - y \operatorname{tg} x - \sin x = 0.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int -\operatorname{tg} x \mathrm{d}x} = \cos x$. Dostaneme rovnici

$$y' \cos x - y \sin x = \sin x \cos x,$$

tedy

$$(y \cos x)' = \sin x \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme (na pravou stranu použijeme např. substituci $t = \sin x$)

$$y \cos x = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x} + \frac{C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

11

Příklad 1.3.13.

Řešte následující rovnici

$$y' - 3x^2 y = (x+2)\,e^{x^3}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int -3x^2 dx} = e^{-x^3}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,e^{-x^3} - 3x^2 y\,e^{-x^3} = x+2,$$

tedy

$$\left(y\,e^{-x^3}\right)' = x+2.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,e^{-x^3} = \frac{x^2}{2} + 2x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + C\right) e^{x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

19

Příklad 1.3.2.

Řešte následující rovnici

$$y' = 6x - 2y.$$

Řešení. **Metodou integračního faktoru:**
Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int 2\mathrm{d}x} = e^{2x}$. Dostaneme rovnici

$$y' e^{2x} + 2y e^{2x} = 6x e^{2x},$$

tedy

$$\left(y e^{2x}\right)' = 6x e^{2x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y e^{2x} = \int 6x e^{2x} \,\mathrm{d}x = 3x e^{2x} - \frac{3}{2} e^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = 3x - \frac{3}{2} + C e^{-2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Metoda variace konstant:
Přidružená homogenní diferenciální rovnici je $y' = -2y$, což je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2\,\mathrm{d}x, \\
\ln|y| &= -2x + C_1, && C_1 \in \mathbb{R}, \\
|y| &= e^{-2x} C_2, && C_2 > 0, \\
y &= e^{-2x} C_3, && C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení. Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = e^{-2x} C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní uvažujme tuto funkci ovšem konstantu C nahradíme nějakou neznámou funkcí $C(x)$, tj. $y(x) = e^{-2x} C(x)$. S využitím pravidla pro derivování součinu můžeme spočítat $y'(x)$ a dosadit do původního zadání, tj.

$$-2 e^{-2x} C(x) + e^{-2x} C'(x) = 6x - 2 e^{-2x} C(x).$$

Pokud jsme vše spočítali správně obdržíme diferenciální rovnici pro funkci $C(x)$, kde se žádný výraz obsahující nederivované $C(x)$ nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$C'(x) = 6x e^{2x},$$

1a

Příklad 1.3.12.

Řešte následující rovnici

$$y' - y\sin x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int -\sin x \mathrm{d}x} = e^{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$y' e^{\cos x} - y \sin x \, e^{\cos x} = \frac{\sin 2x}{2} e^{\cos x},$$

tedy

$$(y e^{\cos x})' = \frac{\sin 2x}{2} e^{\cos x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (vpravo použijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ a substituci $t = \cos x$)

$$y e^{\cos x} = e^{\cos x}(1 - \cos x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = 1 - \cos x + C e^{-\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

(1i)

Příklad 1.3.6.

Řešte následující rovnici

$$y'x - y = x^2 \ln x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' - \frac{y}{x} = x \ln x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem

$$e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{-1}{x}.$$

Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \ln x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \ln x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{x} = x \ln x - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = x^2 \ln x - x^2 + Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.9.

Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \frac{-x}{1-x^2}\,dx} = \sqrt{1-x^2}$, kde jsme vzali v úvahu, že přímo ze zadání je $x \in (-1,1)$. Dostaneme rovnici

$$y'\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

tedy

$$\left(y\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (na pravou stranu použijeme např. substituci $t = \sin x$)

$$y\sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\arcsin^2 x + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1k

Příklad 1.3.15.

Řešte následující počáteční problém

$$y' = x^2 \mathrm{e}^x + \frac{y}{x}, \quad y(1) = \mathrm{e}\,.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' - \frac{y}{x} = x^2 \mathrm{e}^x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \frac{-1}{x} \mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = x \mathrm{e}^x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = x \mathrm{e}^x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{x} = x \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = x^2 \mathrm{e}^x - x \mathrm{e}^x + Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(1) = \mathrm{e}$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} + C = \mathrm{e},$$

tedy $C = \mathrm{e}$ a řešení počátečního problému je

$$y = x^2 \mathrm{e}^x - x \mathrm{e}^x + \mathrm{e}\, x = x(x \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}).$$

▲

Příklad 1.3.11.

Řešte následující rovnici

$$y' \cos x + y \sin x = 1.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{y \operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

tedy

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \sin x + C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1m

Příklad 1.3.14.

Řešte následující rovnici

$$y' e^{x^2} + 2xy\, e^{x^2} = \cos x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + 2xy = \cos x\, e^{-x^2}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int 2x \mathrm{d}x} = e^{x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y' e^{x^2} + 2xy\, e^{x^2} = \cos x,$$

tedy

$$\left(y\, e^{x^2}\right)' = \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\, e^{x^2} = \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = (C + \sin x)\, e^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

1n

Příklad 1.3.10.

Řešte následující rovnici

$$y' + y\,\mathrm{tg}\, x = \cos^3 x.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \mathrm{tg}\, x \mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{y\,\mathrm{tg}\, x}{\cos x} = \cos^2 x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \cos^2 x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{\cos x} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \cos x \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

(10)

Příklad 1.3.17.

Řešte následující počáteční problém

$$y' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' - 4y = \cos x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -4\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-4x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{-4x} - 4y \mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} \cos x,$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{-4x}\right)' = \mathrm{e}^{-4x} \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme (pravou stranu integrujeme per partes)

$$y \mathrm{e}^{-4x} = \frac{-4}{17} \mathrm{e}^{-4x} \cos x + \frac{1}{17} \mathrm{e}^{-4x} \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{-4}{17} \cos x + \frac{1}{17} \sin x + C \mathrm{e}^{4x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(0) = 1$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(0) = \frac{-4}{17} + C = 1,$$

tedy $C = \frac{21}{17}$ a řešení počátečního problému je

$$y = \frac{1}{17} \sin x - \frac{4}{17} \cos x + \frac{21}{17} \mathrm{e}^{4x}.$$

▲

1p

Příklad 1.3.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2y}{x^2-1} = x.$$

Řešení. Je zřejmé, že se jedná o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Proto si ukážeme obě metody řešení. Začneme s metodou integračního faktoru. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\underline{\mathrm{e}^{\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-1}} = \mathrm{e}^{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = \frac{x-1}{x+1}}$ (všimněte si, že pro určení integračního faktoru není nutné uvažovat integrační konstantu C ani jeho znaménko – proto jsme odstranili absolutní hodnotu u posledního výrazu). Po úpravě dostaneme

$$y'\frac{x-1}{x+1} + \frac{2y}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)}{x+1}.$$

S využitím pravidla pro derivování součinu si můžeme všimnout, že výraz na levé straně lze napsat jako $\left(y\frac{x-1}{x+1}\right)'$, což je hlavní myšlenka metody integračního faktoru. Pak integrováním obou stran obdržíme $\int x-2+\frac{2}{x+1}\,dx$

$$y\frac{x-1}{x+1} = \int \frac{x(x-1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní vyřešíme tutéž diferenciální rovnici pomocí metody variace konstant. Proto se nejdříve zaměříme na přidruženou homogenní diferenciální rovnici, tj. $y' = -\frac{2y}{x^2-1}$. To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-1}, \\
\ln|y| &= -\ln|x-1| + \ln|x+1| + C, && C \in \mathbb{R}, \\
\ln\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= C, && C \in \mathbb{R}, \\
\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= K, && K > 0, \\
\frac{y(x-1)}{x+1} &= L, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= \frac{L(x+1)}{x-1}, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení (pokud to je možné – u tohoto typu diferenciálních rovnic to je možné vždy). Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = \frac{C(x+1)}{x-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2a

$$y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$p(x) = x \qquad q(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int p(x) = \int x = \frac{1}{2}x^2$$

$$y' e^{\frac{1}{2}x^2} + x e^{+\frac{1}{2}x^2} \cdot y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot y\right)' = 1$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y\right)^{B} = x + c$$

$$\underline{\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x+c)}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

2b

$$y' + y = 1 + 3x + x^2$$

$p = 1 \qquad \int p = x$

$(e^x y)' = e^x(1 + 3x + x^2)$ per parfes

$e^x y = e^x(x^2 + x) + c$

$y = \underline{x^2 + x + ce^{-x}} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad c \in \mathbb{R}$

2c

$$y' + y\sin x = \sin x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$(y e^{-\cos x})' = \sin x \, e^{-\cos x}$$

$$\int \sin x \, e^{-\cos x} \, dx \underset{\uparrow}{=} e^{-\cos x} + k$$

substituce

$$y e^{-\cos x} = e^{-\cos x} + k$$

$$y = 1 + k e^{+\cos x} \qquad x, k \in \mathbb{R}$$

2d

$$y' + \underbrace{\frac{x+2}{x}}_{p} y = 2$$

$$\int \frac{x+2}{x}\,dx = \int 1 + \frac{2}{x}\,dx = x + 2\ln x$$

$$e^{x+2\ln x} = e^x \cdot x^2$$

$$(y' e^x x^2)' = 2e^x x^2$$ per partes

$$y' e^x x^2 = 2(e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x) + c$$

$$y' = 2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + c \cdot \frac{1}{x^2} e^{-x}$$

$x \in (-\infty, 0)$

$x \in (0, \infty)$

2e

$$y' + \frac{1}{x}y = 2e^{-x} - xe^{-x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \qquad x \neq 0$$

$$(y\,|x|)' = (2e^{-x} - xe^{-x})\,|x|$$

pro $x > 0$ máme z per partes

$$yx = e^{-x}x^2 + c$$

$$y = e^{-x} \cdot x + \frac{c}{x}$$

$x < 0$

$$y(-x) = -e^{-x} \cdot x^2 + c$$

$$y = e^{-x} \cdot x + \frac{c}{x}$$ $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$

$c \in \mathbb{R}$

2f

$$y' - \frac{1}{x-1} y = \frac{1}{x+1} \qquad y(0) = -1 \qquad x \neq 1 \quad x \neq -1$$

$$\int \frac{-1}{x-1}\,dx = -\ln|x-1| = \ln\frac{1}{|x-1|}$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{|x-1|}\right)' = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{|x-1|}$$

$$x > 1 \qquad \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \int \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

$$y = \underline{\underline{(x+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\right)}} \qquad x \neq 1, -1$$

pro $x < 1$ vyjde stejně

poč. podm. bereme interval $x \in (-1, 1)$

$$y(0) = -c = -1 \qquad c = 1$$

tedy $$\underline{\underline{y = (x-1)\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1\right),}} \qquad x \in (-1, 1)$$

3

Příklad 1.3.19.

V 13 hodin 28 minut byla v hotelovém pokoji, vytopeném na 18,3 °C nalezena mrtvola, jejíž teplota byla 26,6 °C. O tři hodiny později je její teplota 21,1 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu teploty živého těla 37 °C.

Řešení. Označíme-li teplotu těla v čase t jako $y(t)$, teplotu okolí jako T a konstantu úměrnosti jako $k > 0$, můžeme ze zadání sestavit rovnici a podmínky

$$y'(t) = -k[y(t) - T]; \quad T = 18,3; \quad y(0) = 26,6; \quad y(3) = 21,1.$$

Rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru, tedy vynásobíme obě strany rovnice $y' + ky = kT$ výrazem $\mathrm{e}^{\int k \mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{kt}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{kt} + ky \mathrm{e}^{kt} = kT \mathrm{e}^{kt},$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{kt}\right)' = kT \mathrm{e}^{kt}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (k a T jsou konstanty)

$$y \mathrm{e}^{kt} = T \mathrm{e}^{kt} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = T + C \mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní potřebujeme určit hodnoty konstant C a k. Dosadíme-li do řešení $T = 18,3$ a $y(0) = 26,6$, získáme rovnici

$$26,6 = 18,3 + C \mathrm{e}^{-k \cdot 0},$$

tedy $C = 8,3$. Využijeme-li této znalosti a navíc do řešení dosadíme $T = 18,3$ a $y(3) = 21,1$, dostaneme

$$21,1 = 18,3 + 8,3 \mathrm{e}^{-3k},$$

tedy $\mathrm{e}^{-3k} = \frac{2,8}{8,3} \doteq 0,33735$. Logaritmováním snadno zjistíme, že $k \doteq 0,36221$.

Nyní potřebujeme odhadnout čas úmrtí. Ze zadání předpokládáme $y(t) = 37$ a najdeme příslušný čas t, tj.

$$18,3 + 8,3 \mathrm{e}^{-0,36221t} = 37,$$

tedy ihned $t \doteq -2,24254$. Dle dostupných informací smrt nastala přibližně před dvěma a čtvrt hodinou, tj. cca v 11:13. ▲

