8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).

V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (1) je třídy $\mathcal{C}^1$.

Definice 2. *Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu* budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Maximální řešení homogenní rovnice:

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

Fakt 3. Maximální řešení rovnice (1):

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R},$$

kde $x_0 \in (a, b)$ a P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

Maximální řešení rovnice (1) splňující *počáteční podmínku* $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + y_0e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde $P(x_0) = 0$, tj. $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$.

Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (1), které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b).

Algoritmus

1. Uvažujeme interval (a, b), na kterém dále pracujeme.
2. Spočteme $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Celou rovnici vynásobíme výrazem $e^{P(x)}$. Tím vlevo získáme $(ye^{P(x)})'$.
4. Zintegrujeme pravou stranu: $e^{P(x)}q(x)$, nezapomeneme na konstantu.
5. Vyjádříme $y(x)$.
6. Případně aplikujeme podmínky.

Hinty

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Příklady

Vyřešte ODR

1. (a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = \frac{1}{2}$
   (b) $y' = 4xy + (2x+1)e^{2x^2}$
   (c) $y'x + y = x \ln x$
   (d) $y' = -3y + x$
   (e) $y' - y\tan x - \sin x = 0$
   (f) $y' - 3x^2 y = (x+2)e^{x^3}$
   (g) $y' = 6x - 2y$
   (h) $y' - y \sin x = \dfrac{\sin 2x}{2}$
   (i) $y'x - y = x^2 \ln x$
   (j) $y' - \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$
   (k) $y' = x^2 e^x + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = e$
   (l) $y' \cos x + y \sin x = 1$
   (m) $y' e^{x^2} + 2xye^{x^2} = \cos x$
   (n) $y' + y\tan x = \cos^3 x$
   (o) $y' - 4y = \cos x$, $y(0) = 1$
   (p) $y' + \dfrac{2y}{x^2-1} = x$

Zkouškové příklady

2. (a) $y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
   (b) $y' + y = 1 + 3x + x^2$
   (c) $y' + y \sin x = \sin x$
   (d) $y' + \dfrac{x+2}{x} y = 2$
   (e) $y' + \dfrac{1}{x} y = 2e^{-x} - xe^{-x}$
   (f) $y' - \dfrac{1}{x-1} y = \dfrac{1}{x+1}$, $y(0) = -1$

Bonus

3. Ve 13:28 byla v pokoji vytopeném na 18,3 °C nalezena mrtvola, jejíž teplota byla 26,6 °C. O tři hodiny později byla její teplota 21,1 °C. Určete čas úmrtí, jestliže živý člověk má teplotu 37 °C.

   Předpokládejte, že změna teploty těla závisí lineárně na čase.

Většina dnešních příkladů pochází odsud:
http://www.math.muni.cz/ zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf