(1a)

**Příklad 9.** Načrtněte grafy řešení rovnice $y' = (y+1)\sqrt{1-y}$.

*Řešení.* Označme funkci na pravé straně písmenem $g$. Stacionární řešení jsou $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, a $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$. Intervaly, kde je funkce $g$ spojitá a nenulová, jsou $(-\infty, -1)$ a $(-1, 1)$.

Zkoumejme nejprve řešení s hodnotami v $(-\infty, -1)$. Pro $y < -1$ platí $g(y) < 0$, a tedy řešení s hodnotami v tomto intervalu jsou klesající. Integrál

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y$$

konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 8.53)[4], protože

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{\frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}}{\frac{1}{(-y)^{3/2}}} = -1$$

a $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(-y)^{3/2}}\,\mathrm{d}y$ konverguje (Příklad 8.50). Integrál

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y$$

diverguje dle Lemmatu 7. To znamená, že řešení s hodnotami v $(-\infty, -1)$ jsou definovaná na intervalu tvaru $(-\infty, T)$, jejich limita v $-\infty$ je $-1$ a limita v bodě $T$ zleva je $-\infty$.

Dále vezměme v úvahu interval $(-1, 1)$. Protože pro $y \in (-1, 1)$ platí $g(y) > 0$, jsou řešení s hodnotami v tomto intervalu rostoucí. Integrál

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y$$

diverguje podle Lemmatu 7. Avšak integrál

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y$$

konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 8.53), neboť

$$\lim_{y\to1-} \frac{\frac{1}{(y+1)\sqrt{1-y}}}{\frac{1}{\sqrt{1-y}}} = \frac{1}{2}$$

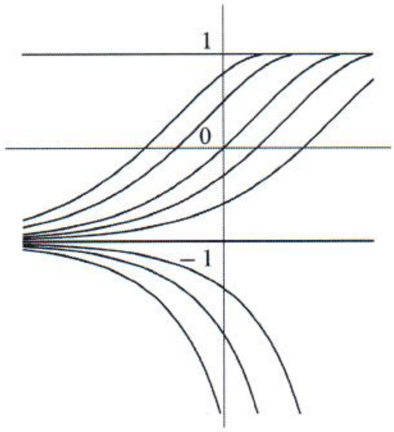
a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\,\mathrm{d}y$ konverguje (Příklad 8.51). Odtud plyne, že řešení s hodnotami v $(-1, 1)$ jsou definovaná na intervalu tvaru $(-\infty, T)$, v $-\infty$ mají limitu $-1$

[4] Věta 8.53 je formulována pro kladné funkce. Zde využíváme zřejmého faktu, že $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b (-f)$.

1a

a v $T$ zleva limitu 1. Navíc, protože funkce $g$ je v bodě 1 rovna 0 a je spojitá zleva, lze nalepit stacionární řešení.

Výsledky znázorníme na obrázku:




Obrázek 7.

♣

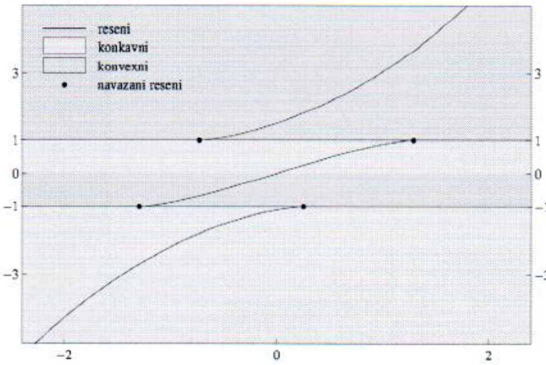
**Příklad 10.** Načrtněte grafy řešení rovnice $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$.

*Řešení.* Označme funkci na pravé straně písmenem $g$. Stacionární řešení je $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$. Intervaly, kde je pravá strana spojitá a nenulová, jsou $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$.

Prozkoumejme interval $(-\infty, -1)$. Pro $y \in (-\infty, -1)$ platí $g(y) > 0$, a tedy řešení s hodnotami v tomto intervalu jsou rostoucí. Integrál $\int_{-\infty}^{-2} \frac{y-1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 8.53), protože integrál $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$ konverguje. Integrál $\int_{-2}^{-1} \frac{y-1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y$ diverguje podle Lemmatu 7. Z uvedeného plyne, že řešení jsou definovaná na intervalech typu $(T, +\infty)$, jejich limita v $T$ zprava je $-\infty$ a limita v $+\infty$ je $-1$.

Vyšetřeme interval $(-1, 1)$. Řešení s hodnotami v tomto intervalu jsou klesající, protože pro $y \in (-1, 1)$ je $g(y) < 0$. Podle Lemmatu 7 integrál $\int_{-1}^{0} \frac{y-1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y$ diverguje. Integrál $\int_{0}^{1} \frac{y-1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y$ ovšem konverguje, neboť integrand je spojitý na $\langle 0, 1\rangle$. To znamená, že řešení jsou definovaná na intervalech typu $(T, +\infty)$, v $+\infty$ mají limitu $-1$, v $T$ zprava limitu 1. Podívejme se podrobněji, co se děje napravo od bodu $T$. Otázka nalepování zde konverguje u bodů $\pm 1$ zprava i zleva, napojí se všechna řešení konvergující k $\pm 1$ na stacionární řešení v konečném čase a tedy body $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ prochází nekonečně mnoho maximálních řešení.

Protože integrál (4) diverguje u $\pm\infty$, nenastane pro řešení v pásech $\mathbb{R} \times (-\infty, -1)$, $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$ "blow up".




(1b)

**Příklad 3.** Vyšetřete průběh řešení rovnice $\sqrt{x+1}x' = e^x - 1$.

*Řešení.* Protože $f(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitě diferencovatelná na $(-1, +\infty)$, prochází každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (-1, +\infty)$ právě jedno řešení. Znaménko funkce $f$ nám dává stacionární řešení $x \equiv 0$ a dále:

Pro $x \in (-1, 0)$ máme klesající řešení, která mají v $-\infty$ limitu 0 a na nulu se nenapojí (z jednoznačnosti řešení), zatímco do $-1$ dojdou v konečném čase $t = b$ ($\int_{-1}^{-1/2} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x-1} dx$ konverguje) a

$$\lim_{t \to b-} x'(t) = \lim_{t \to b-} \frac{e^{x(t)} - 1}{\sqrt{x(t)+1}} = -\infty.$$

Pro $x \in (0, +\infty)$ je řešení rostoucí, v $-\infty$ má limitu 0 a nenapojí se na stacionární řešení. Protože

$$\int_K^{+\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} dx$$

konverguje, nastane "blow up".

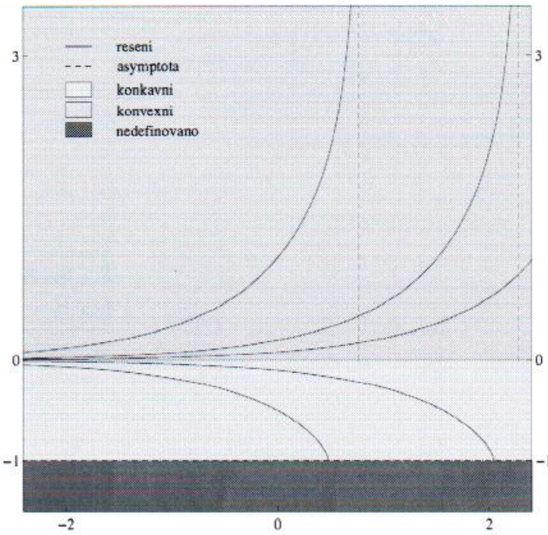
Vypočteme druhou derivaci:

$$x''(t) = \frac{e^x\sqrt{x+1} - (e^x-1)\frac{1}{2}\sqrt{x+1}^{-1}}{x+1} \cdot \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1}} =$$

$$\frac{e^x - 1}{(x+1)^2} \left( e^x \left( x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right)$$

(1b)

Protože funkce $e^x(x+1/2)+1/2$ je kladná na $(-1,+\infty)$ (například zderivováním zjistíme, že tato funkce nabývá minima v bodě $x=-3/2$), jsou řešení na $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ konvexní a řešení na $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ konkávní.



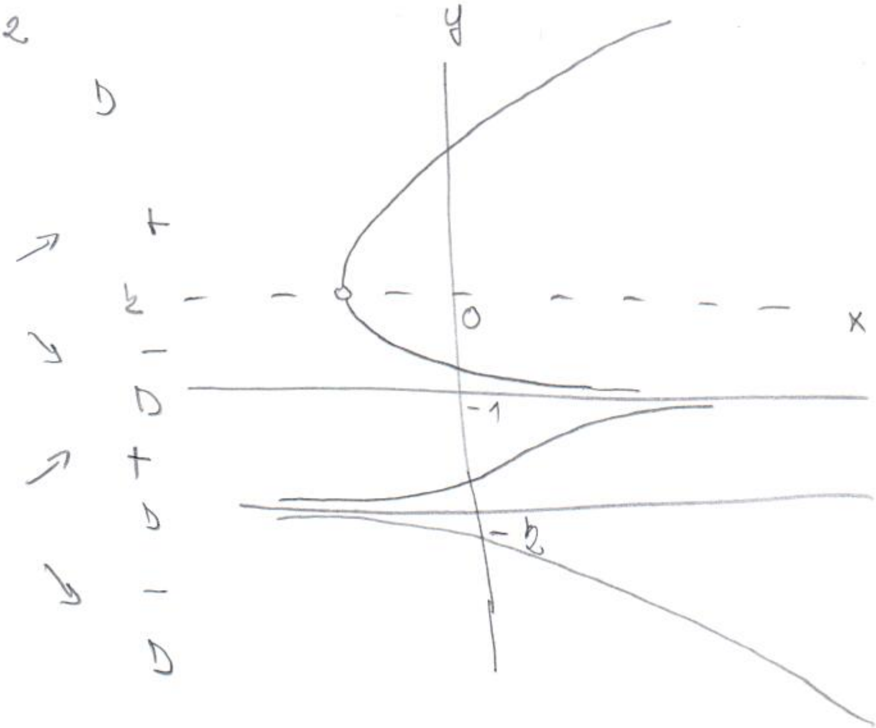

L

(1c) $y' = \frac{1}{y}(y+1)(y+2)$

(1) $y \neq 0$

$y_0 = -1 \qquad y_0 = -2$

(2)




(3) vede na integrály

(a) $\int_1^\infty \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,dy$ D

LSK s $h(y) = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$ $\quad \int_1^\infty \frac{1}{y}$ D

$\lim_{y \to \infty} \frac{f}{h} = 1$

(b) $\int_0^1 \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,dy$ K lze spoj dodef

(c) $\int_{-1/2}^{0} f$ K −||−

(d) $\int_{-1}^{-1/2} f$ D

LSK $\frac{1}{y+1}$ $\quad \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{y+1}$ D (lze spočítat)

(e) $\int_{-3/2}^{-1} f$ D stejně ↗

(f) $\int_{-2}^{-3/2} f \quad D$

LSK $\quad h = \frac{1}{y+2} \quad \int_{-2}^{-3/2} \frac{1}{y+2} \quad D$

(g) $\int_{-5}^{-2} f \quad D$ $\quad$ stejně

(h) $\int_{-\infty}^{-5} f \quad D$

LSK $\quad h = \frac{1}{y} \quad \int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{y} \quad D$

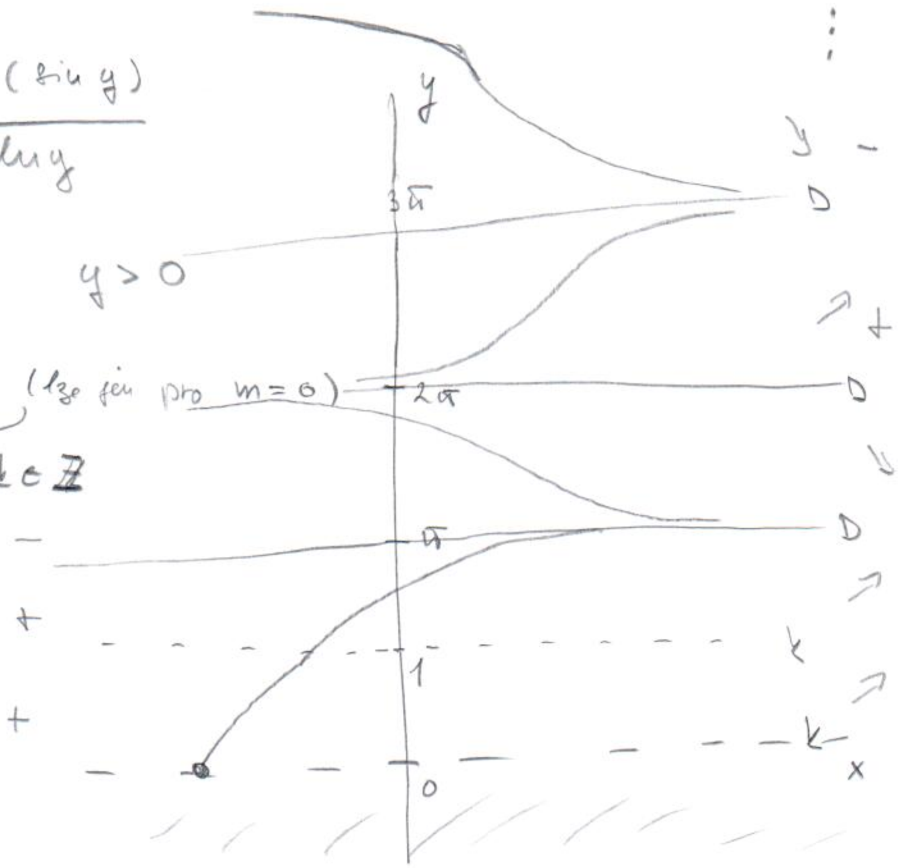
(4) okraj u $y = 0$

$$\lim_{y \to 0+} \frac{1}{y}(y+1)(y+2) = \infty$$

$$\lim_{y \to 0-} \qquad = -\infty$$

(5) nakreslíme

(1a) $y' = \frac{y^3-1}{y^2} \cdot \frac{\sin(\sin y)}{\ln y}$




(1) $y \neq 0 \quad y \neq 1 \quad y > 0$

(2) $\sin y = m\pi$ (lze jen pro $m=0$)

$y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(3)
(a) $\int_0^{1/2} \underbrace{\frac{y^2}{(y-1)(y^2+y+1)} \cdot \frac{\ln y}{\sin(\sin y)}}_{f(y)} dy$ K

LSK s $h(y) = \frac{y^2 \ln y}{y} = y \ln y \quad \int_0^{1/2} y \ln y \, dy$ K

(b) $\int_{1/2}^{1} f(y)$ K lze spoj. dodef.

$\lim_{y \to 1} f(y) = \frac{1}{3 \sin(\sin 1)}$

(c) $\int_1^{1,1} f(y)$ K − u −

(d) $\int_{1,1}^{\pi} f(y)$ D

$\frac{1}{\sin(\sin y)} \approx \frac{1}{\pi - y}$. $\lim_{y \to \pi} \frac{\pi - x}{\sin(\sin y)} \overset{\text{L'H}}{\underset{0/0}{=}}$

$= \lim_{y \to \pi} \frac{-1}{\cos(\sin y) \cdot \cos y} = \underline{1}$

tedy LSK s $h(y) = \frac{1}{\pi - y} \quad \int_{1,1}^{\pi} \frac{1}{\pi - y} dy$ D

1d (e) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(y)$ D analogicky

(f) $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(y)$ D

LSK $\frac{1}{y-2\pi}$ $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{y-2\pi}\,dy$ D

další $3\pi, 4\pi \ldots$ analogicky

(4) chování u 1

$$= \lim_{y\to 1+} \frac{\sin(\sin y)}{y^2} \cdot \frac{(y-1)}{\ln y} \cdot (y^2+y+1) = 3\sin(\sin 1)$$

$$\lim_{y\to 1-} \quad = 3\sin(\sin 1)$$

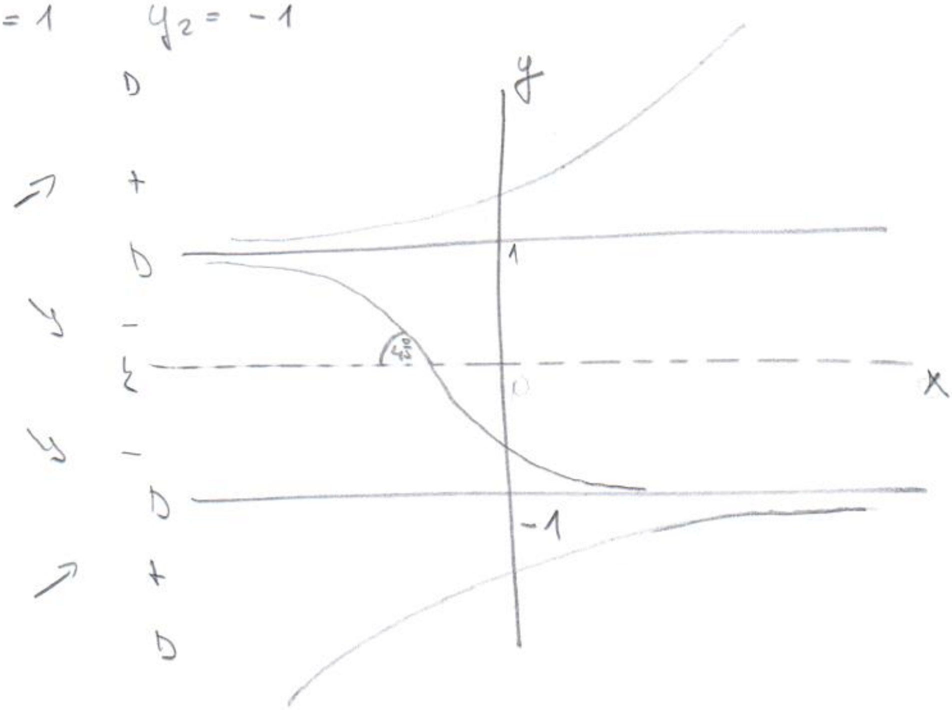
(5) zakreslíme

(1c) $$y' = \frac{(y^2-1)\arctan y}{y}$$

(1) $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y_1 = 1 \qquad y_2 = -1$

(2)



(3)

(a) $$\int_2^\infty \underbrace{\frac{y}{\arctan y \; (y-1)(y+1)}}_{f(y)} \, dy \quad D$$

LSK $\quad h(y) = \frac{y}{\frac{\pi}{2} y^2} = \frac{2}{\pi y} \qquad \int_2^\infty \frac{2}{\pi y} \quad D$

Pozn. $f(y)$ je sudá, tedy konv. $\int$ se spočte rychleji

(b) $$\int_1^2 \frac{y}{\arctan y \; (y-1)(y+1)} \, dy \quad D$$

LSK $\quad h(y) = \frac{1}{y-1} \qquad \int_1^2 \frac{1}{y-1} \quad D$

(c) $\int_{1/2}^1 f(y) D \qquad$ analogicky (b)

(d) $\int_0^{1/2} f(y)$ K $\qquad$ lze spoj. dodef. $\quad -1$

ze sudosti: $\quad \int_{-1/2}^0 f \; K \qquad \int_{-1}^{-1/2} f \; D \qquad \int_{-2}^{-1} f \; D \qquad \int_{-\infty}^{-2} f \; D$

(4) chování v 0: 1e

$$\lim_{y \to 0+} \frac{(y^2-1)\overbrace{\arctan y}^{\to 1}}{y} = -1$$

$$\lim_{y \to 0-} = -1$$

(5) zakreslíme

(1f)

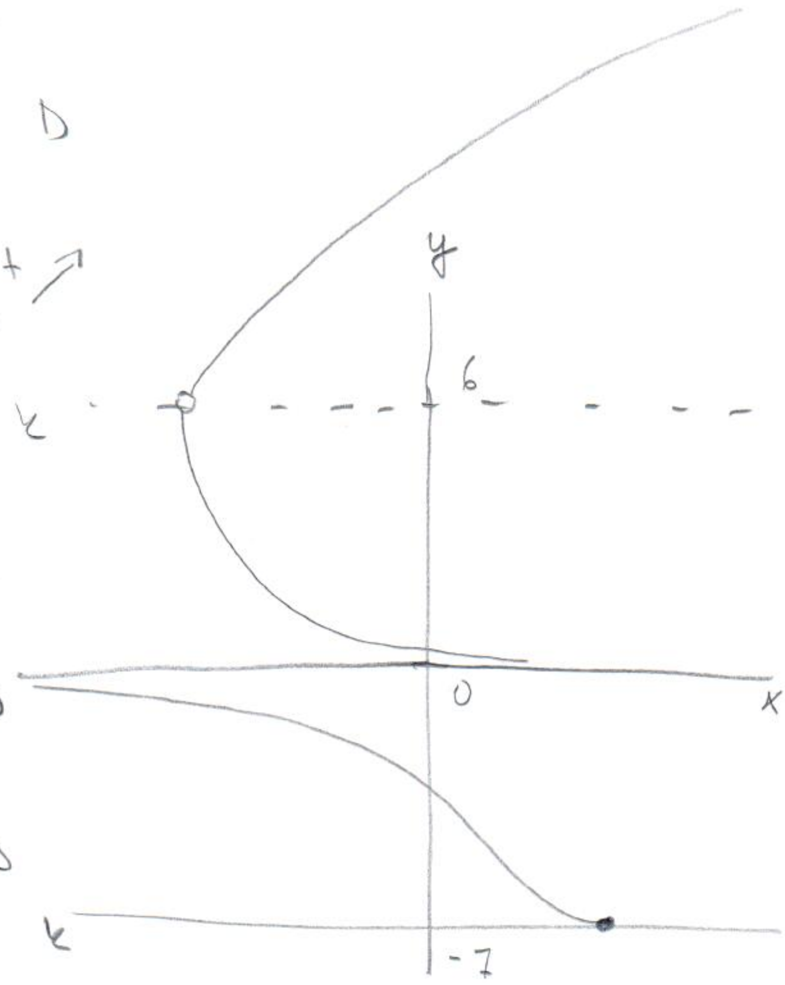
$$y' = \frac{\sqrt{y+7}\,\arctan^2 y}{y-6}$$

(1) h.b. $-7,\ 0,\ 6$

$y+7 \geq 0 \qquad y \geq -7$

(2) $y_1 \equiv -7$

$y_2 \equiv 0$




(3)
(a) $\displaystyle\int_{-7}^{-1} \underbrace{\frac{y-6}{\sqrt{y+7}\,\arctan^2 y}}_{f(y)}$ K

LSK s $h(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y+7}}$ $\qquad \displaystyle\int_{-7}^{-1} \frac{1}{\sqrt{y+7}}$ K

$$\lim_{y\to -7+} \frac{f}{h} = \lim_{y\to -7+} \frac{y-6}{\arctan^2 y} = \frac{-13}{(\arctan 7)^2} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(y)$ D

LSK s $\dfrac{1}{y^2}$ $\qquad \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{y^2}$ Div

$$\lim_{y\to 0-} \frac{f}{h} = -\frac{6}{7}$$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(y)$ D

$$\int_1^6 f(y) \quad K$$ lze spoj. dodef. na kpt. 1b

$$\int_6^{10} f(y) \quad K$$

$$\int_{10}^{\infty} f(y) \quad D$$

LSK $\quad h(y) = \dfrac{y}{\sqrt{y}\,\frac{\pi^2}{4}} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\pi^2}$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f}{h} = 1 \qquad \int_{10}^{\infty} \frac{4\sqrt{y}}{\pi^2} \quad D$$

(4) $$\lim_{y\to 6-} \frac{\sqrt{y+7}\,\operatorname{arctan}^2 y}{y-6} = -\infty$$

$$\lim_{y\to 6+} \qquad = \infty$$

(1g) $y' = e^y \sqrt[3]{\arctan y} \; \frac{y-1}{y+1}$

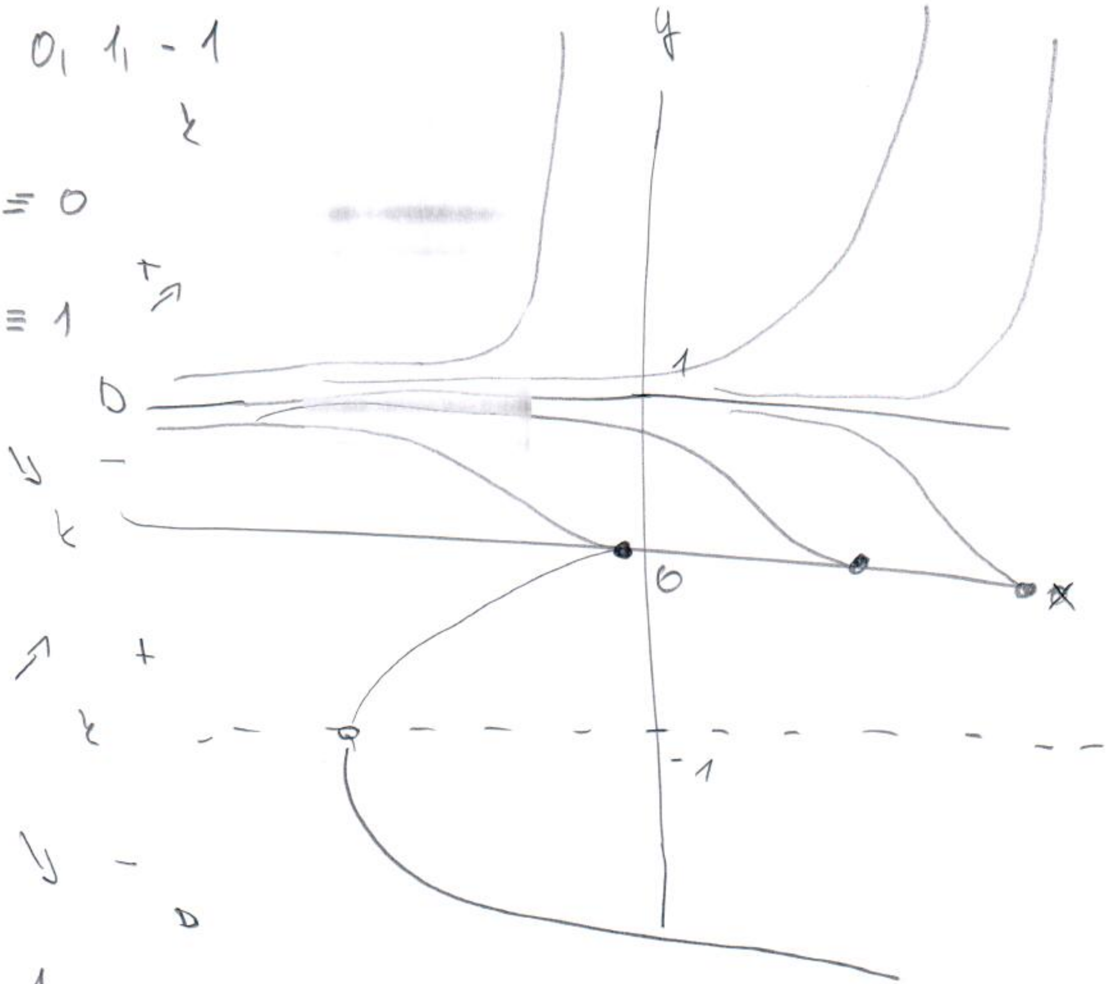
(1) $y \neq -1$

n.b. $0, 1, -1$

k

(2) $y_1 \equiv 0$

$y_2 \equiv 1$




(3)
(a) $\int_{-\infty}^{-2} \underbrace{\frac{y+1}{e^y \sqrt[3]{\arctan y}\,(y-1)}}_{f(y)} \, dy$ D

LSK $h(y) = e^{-y}$ $\int_{-\infty}^{-2} e^{-y} = \left[-e^{-y}\right]_{-\infty}^{-2}$

$\lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{h(y)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\arctan y}} = -\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ $= -e^2 + \infty = \infty$

(b) $\int_{-2}^{-1} f(y)$ lze spoj. dof. $\underline{\underline{k}}$

(e) $\int_{-1}^{-1/2} f(y)$ K

(f) $\int_{-1/2}^{0} f(y)$ K

LSK $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ $\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ K

$\lim_{y\to 0-} \frac{f}{h} = -1$

(g) $\int_{0}^{1/2} f(y)$ K analog.

(h) $\int_{1/2}^{1} f(y)$ D

LSK $\frac{1}{y-1}$ $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y-1}$ D

$\lim_{y\to 1-} \frac{f}{h} = \frac{2}{e\sqrt[3]{\arctan 1}}$

(i) $\int_{1}^{2} f(y)$ D analog.

(j) $\int_{2}^{\infty} f(y)$ K

$\lim \frac{f}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}$ LSK s $\frac{1}{e^{y}}$ $\int_{2}^{\infty} e^{-y}$ K

(4) $\lim_{y \to -1^-} \overset{\oplus}{e^y} \, \underset{\ominus}{\sqrt[3]{\arctan y}} \, \dfrac{\overset{\ominus}{y-1}}{\underset{\ominus}{y+1}} = -\infty$

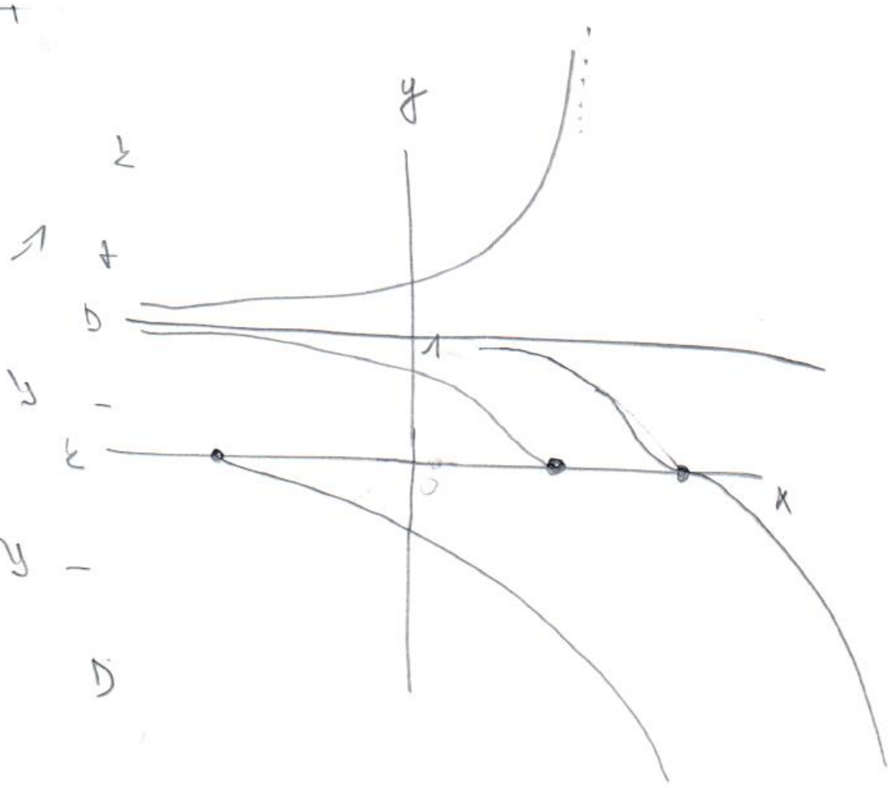
$\lim_{y \to -1^+} = \infty$

(2a)

$$y' = e^{y}(y-1)\sqrt{e^{|y|}-1}$$

(1) $y_0 \equiv 1$ $\quad y_1 \equiv 0$

(2)




(3) (a) $\int_{2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{e^{y}(y-1)\sqrt{e^{|y|}-1}}}_{f(y)}$ K

LSK s $h(y) = e^{-\frac{3}{2}y} \cdot \frac{1}{y}$ $\quad \int_{2}^{\infty} h(y)$ K

viz minulé cvičení pro detaily výpočtu.

(b) $\int_{1}^{2} f(y)$ D

LSK s $h(y) = \frac{1}{y-1}$ $\quad \int_{1}^{2} \frac{1}{y-1}$ D

(c) $\int_{1/2}^{1} f(y)$ D $\qquad$ – u –

(d) $\int_{0}^{1/2} f(y)$ K

LSK $h(y) = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$ $\quad \int_{0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{|y|}}$ K

(e) $\int_{-1}^{0} f(y)$ K $\qquad$ – u –

(f) $\int_{-\infty}^{-1} f(y)$ D

LSK $h(y) = \frac{1}{y} e^{-y + \frac{|y|}{2}}$ $\quad \int_{-\infty}^{-1} h(y)$ D

(2b)

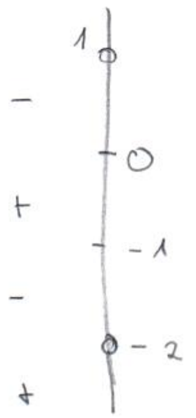
$$y' = \ln(1-\sqrt[3]{y})\,\frac{y+1}{y+2}$$

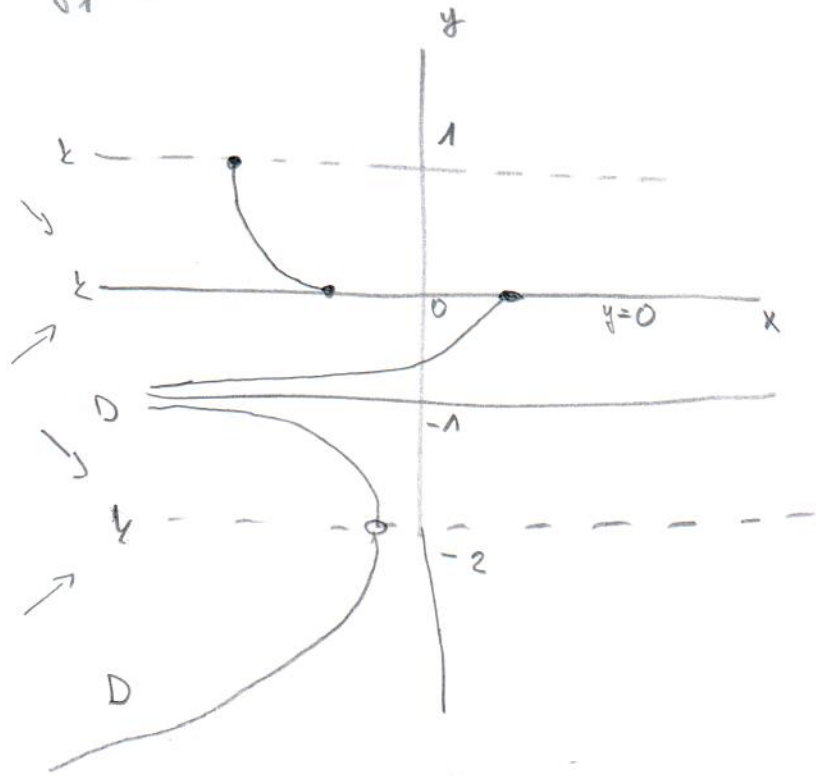
(1) $1-\sqrt[3]{y} > 0 \quad \to \quad 1 > y \qquad y \neq -2$

stac. řešení: $y_0 = -1$

$y_1 = 0$

(2)




(3)

Vede na integrály

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \underbrace{\frac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})}\,\frac{y+2}{y+1}}_{f(y)}\,dy$ k

LSK s $h(y) = \dfrac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})}$

$\displaystyle\lim_{y\to 1-} \frac{f(y)}{h(y)} = \frac{3}{2}$ $\quad \displaystyle\int_{1/2}^{1} f$ k $\iff \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})}\,dy$ k

$z = 1-\sqrt[3]{y} \qquad dz = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{y^{2/3}}\,dy$

$y = (1-z)^3 \qquad dy = 3(1-z)^2(-1)\,dz$

$= \displaystyle\int_{0}^{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \underbrace{\frac{1}{\ln z}\,3(1-z)^2}_{\ell(z)}\,dz$ k $\iff \displaystyle\int_{0}^{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \underbrace{\frac{1}{\ln z}}_{k(z)}$ k $\to$ ale on konv.

LSK s $\dfrac{1}{\ln z}$ $\quad \displaystyle\lim_{z\to 0+} \frac{\ell(z)}{k(z)} = 3 \quad \to \int_{1/2}^{1} f(y)\,dy$ k

(25)

(b) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})} \frac{y+2}{y+1}\, dy \overset{?}{K}$

LSK $\quad h(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\, dy \quad K$

$\lim_{y \to 0+} \frac{f(y)}{h(y)} = 2$

(c) $\int_{-1/2}^{0} f \quad K$ ↗ stejně

(d) $\int_{-1}^{-1/2} f(y) \quad \overset{?}{D}$

LSK $\quad s \quad h = \frac{1}{y+1} \quad \int_{-1}^{-1/2} h(y) \quad \mathrm{Div}$

$\lim_{y \to -1} \frac{f}{h} = \frac{1}{\ln 2}$

(e) $\int_{-3/2}^{-1} f(y) \quad D$ ↗ stejně

(f) $\int_{-2}^{-3/2} f(y) \quad K$ lze spoj. dodefinovat

(g) $\int_{-10}^{-2} f(y) \quad K$ – $\|$ –

(h) $\int_{-\infty}^{-10} f(y) \quad D$

LSK $\quad s \quad h(y) = \frac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})}$

$\lim_{y \to -\infty} \frac{f}{h} = 1$

$\int_{-\infty}^{-10} \frac{1}{\ln(1-\sqrt[3]{y})}\, dy = \int_{1+\sqrt[3]{10}}^{\infty} \frac{1}{\ln z} 3(1-z)^2\, dz \quad \underline{D}$

$z = 1 - \sqrt[3]{y}$

(23)

(4) jak se to chová kolem $y = -2$ ?

$$\lim_{y \to -2+} \ln(1-\sqrt[3]{y}) \frac{y+1}{y+2} = -\infty$$

$$\lim_{y \to -2-} = \infty$$

a kolem +1 zleva? $\lim_{y \to 1-} \ln(1-\sqrt[3]{y}) \frac{y+1}{y+2} = -\infty$

(5) dokreslíme do grafu

(2b)

# Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (B)

**LS 2011-2012**

**Příklad 1:** Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = \cos 2x$$

Která z těchto řešení mají limitu v $+\infty$? Jakých hodnot může tato limita nabývat?

(12 bodů)

**Příklad 2:** Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{e^y - e^{-y}}{e^x + e^{-x}},$$

spočtěte jejich limity v krajních bodech definičního oboru a načrtněte jejich grafy.

(12 bodů)

**Příklad 3:** Uvažujme následující autonomní rovnici:

$$y' = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$$

Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké nerostoucí řešení definované na $\mathbf{R}$.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.

(12 bodů)

**Příklad 4:** Uvažme následující diferenciální rovnici:

$$y' - \frac{y}{x} = y^3 \cos x.$$

Ukažte, že existuje řešení této rovnice splňující počáteční podmínku $y(\pi) = \sqrt{\pi}$, a vypočtěte, jaký má tvar na okolí bodu $\pi$. (12 bodů)

**Příklad 5:** Najděte fundamentální systém řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ -8 & -7 & -21 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$

Určete všechna řešení soustavy, která mají v $+\infty$ limitu $[0, 0, 0]$. (12 bodů)

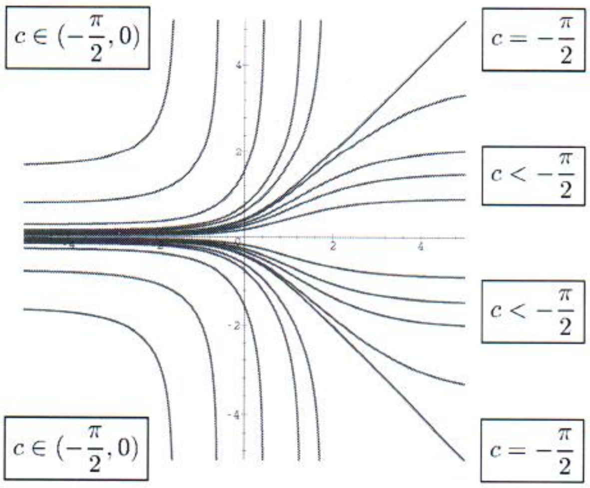
---

# Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (B)

**LS 2011-2012**

**Příklad 1:** Všechna maximální řešení: $y(x) = -\frac{9}{85}\cos 2x - \frac{2}{85}\sin 2x + ae^x + be^{-x}\cos 2x + ce^{-x}\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Uvedené řešení má v $+\infty$ limitu, právě když $a \neq 0$. Pro $a > 0$ je limita rovna $+\infty$, pro $a < 0$ je limita rovna $-\infty$.

**Příklad 2:** Všechna maximální řešení: Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbf{R}$. Dále řešení vzorcem $y(x) = \log \frac{1+\exp(2\operatorname{arctg} x + 2c)}{1-\exp(2\operatorname{arctg} x+2c)}$ nebo vzorcem $y(x) = \log\frac{1-\exp(2\operatorname{arctg} x+2c)}{1+\exp(2\operatorname{arctg} x+2c)}$ definovaná na $\mathbf{R}$, je-li $c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}\rangle$; na $(-\infty, \log(\operatorname{tg}(-c)))$, je-li $c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Limita v $-\infty$ je nula pro stacionární řešení, $\log\frac{1+e^{2c}}{1-e^{2c}}$ pro řešení daná prvním vzorcem, $\log\frac{1-e^{2c}}{1+e^{2c}}$ pro řešení daná druhým vzorcem. Limita v $+\infty$ je nula pro stacionární řešení; pokud $c < -\frac{\pi}{2}$, pak $\log\frac{1+e^{\pi+2c}}{1-e^{\pi+2c}}$ pro řešení daná prvním vzorcem, $\log\frac{1-e^{\pi 2c}}{1+e^{\pi+2c}}$ pro řešení daná druhým vzorcem; pokud $c = -\frac{\pi}{2}$, pak $+\infty$ pro řešení daná prvním vzorcem, $-\infty$ pro řešení daná druhým vzorcem. Pokud $c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, je limita v pravém krajním bodě $+\infty$ pro řešení daná prvním vzorcem, $-\infty$ pro řešení daná druhým vzorcem.




**Příklad 3:** (a) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v = 0\}$; (b) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1)\}$
(c) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v = -1$ nebo $v = 0\}$; (d) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-2, -1)\}$

**Příklad 4:** $y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\sin x - \frac{4}{x}\cos x + \frac{4}{x^2}\sin x - \frac{3\pi}{x}^2}}$ na nějakém okolí bodu $\pi$. (Přesněji na maximálním otevřeném intervalu, který obsahuje bod $\pi$ a na němž je výraz pod odmocninou kladný.)

**Příklad 5:** Fundamentální systém tvoří například trojice vektorových funkcí: $[3e^{2x}, -5e^{2x}, e^{2x}]$, $[3xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}, e^{2x} - 5xe^{2x}, xe^{2x}]$, $[-e^x, e^x, 0]$. Nulovou limitu v $+\infty$ má pouze konstantní nulové řešení.

(2c)

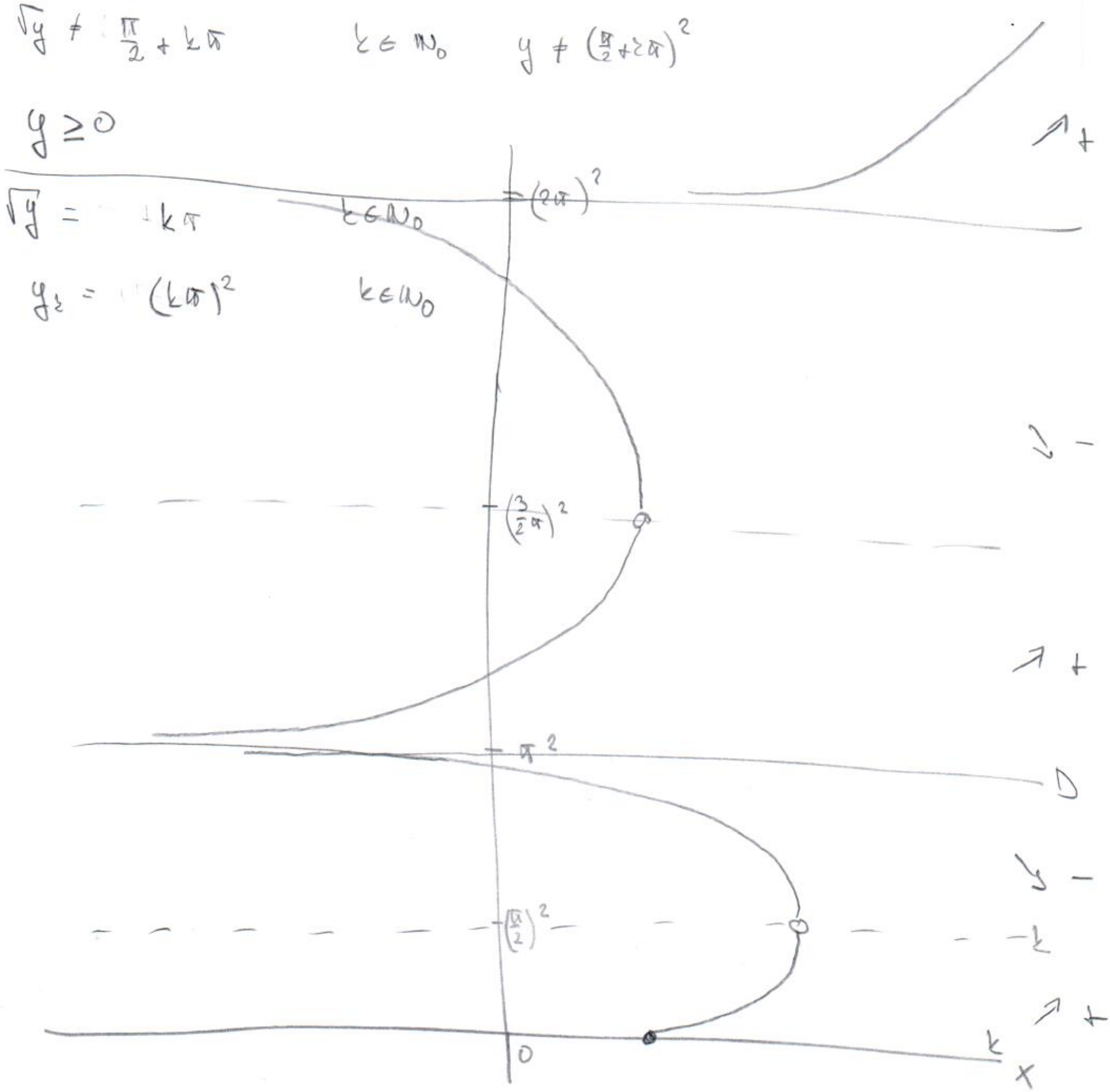
$$y' = \tan\sqrt{y}$$

(1) $\sqrt{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{N}_0 \qquad y \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$

$y \geq 0$

n.s: $\sqrt{y} = k\pi \qquad k \in \mathbb{N}_0$

(2) $y_k = (k\pi)^2 \qquad k \in \mathbb{N}_0$




(3) rešimo $\int$:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}/2} \underbrace{\frac{\cos\sqrt{y}}{\sin\sqrt{y}}}_{f(y)}\, dy$ k

LSK $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ $\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}/2} \frac{1}{\sqrt{y}}$ k

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}/2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} f(y)\, dy$ k $\quad$ ker spoj. dodef

(2c) $\pi^2 - 0{,}5$

(b) $\int f(y)$ K



$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

(d) $\int_{\pi^2-0{,}5}^{\pi^2} f(y)$ D

Zkusíme Lemmama $g(y) = -\tan\sqrt{y} \geq 0$ na $[\pi^2 - 0{,}5, \pi^2]$

$$(-\tan\sqrt{y})' = \frac{-1}{\cos^2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad g(\pi^2) = 0$$

$$g'_-(\pi^2) = \frac{-1}{1} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{-1}{2\pi} \text{ je vlastní.}$$

Pak máme D

(e) analogicky u $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$ K, protože lze dodef,

u $(k\pi)^2$ D, protože Lemma

(4)

$$\lim_{y \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 +} \tan\sqrt{y} = -\infty$$

$$\lim_{y \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 -} \tan\sqrt{y} = \infty$$

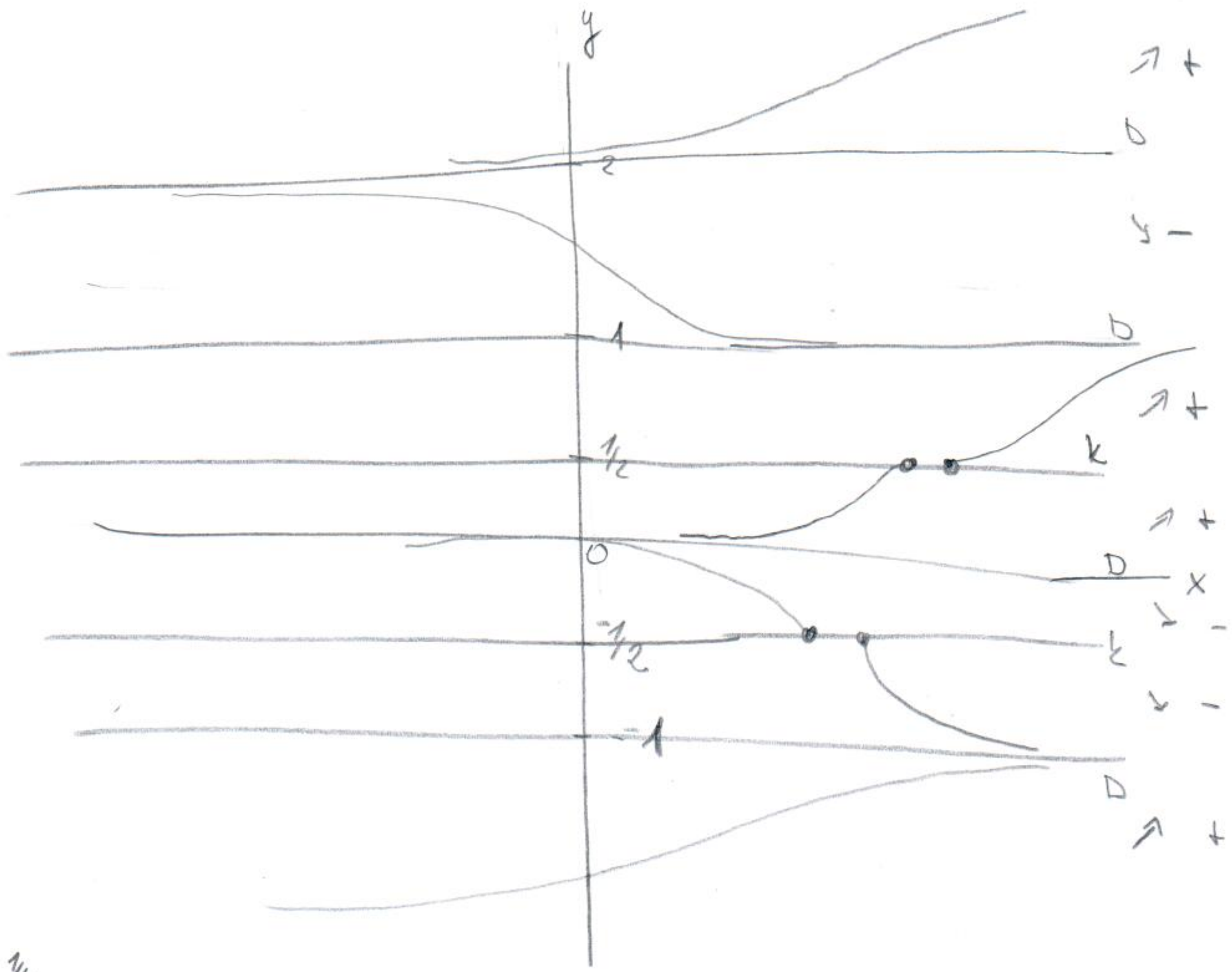
(2d)

$$y' = \arcsin(\sin \pi y)\ \underbrace{\sqrt{\left|\ln\left(\tfrac{1}{2} + |y|\right)\right|}}_{\geq 0}$$

fce je lichá

① $y \in \mathbb{R}$

② $y_0 = \frac{1}{2}$ $\quad y_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad y_k = k \quad k \in \mathbb{Z}$




③

(a) $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{1}{\underbrace{\arcsin(\sin \pi y)\sqrt{|\ln(\frac{1}{2}+|y|)}}_{f(y)}}\,dy$ D

LSE s $h(y) = \frac{1}{x}$ $\quad \int_0^{1/4} \frac{1}{x}$ D

(b) $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} f(y)$ K

LSK s $h(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - 1/2}}$ $\quad \displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{y - 1/2}}$ K

$$\lim_{y \to 1/2} \sqrt{\frac{y - 1/2}{\ln(\frac{1}{2} + y)}} = \sqrt{1} \qquad \lim_{y \to 1/2} \frac{y - 1/2}{\ln(\frac{1}{2} + y)} \overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \frac{1}{\frac{1}{y + 1/2}}$$

2d

(c) $\int_{1/2}^{3/4} f(y)$ K analogicky (b)

(d) $\int_{3/4}^{1} f(y)$ D

LSK $h(y) = \frac{1}{y-1}$ $\quad \int_{3/4}^{1} h(y)$ D

neb $\lim_{y \to 1+} \frac{y-1}{\arcsin(\sin \pi y)} \overset{l'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{y \to 1+} \frac{1}{1/\sqrt{1-(\sin \pi y)^2} \cdot \cos \pi y \cdot \pi} = \frac{-1}{\pi}$

(e) další $\int$ na mezemi u k, $k \in \mathbb{N}$, každé div., lze srovnat s $\frac{1}{y-k}$ (příp. $\frac{1}{k-y}$)

pro $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ plyne div z lichosti