7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

$$y' = g(y)$$

Lemma 1. Nechť funkce g je spojitá na $[a, b]$, kladná na $[a, b)$, $g(b) = 0$ a $g'_-(b)$ existuje a je vlastní. Pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.

Algoritmus

1. Najdeme definiční obor g a nulové body. Tím získáme intervaly J_i pro další výpočty.
2. Zakreslíme stacionární řešení a určíme, na jakých intervalech J_i bude y' kladná nebo záporná a tedy y rostoucí a klesající.
3. Fixujeme J_i. Určíme "definiční obor" $y(x)$. Máme možnosti:
   (a) $x \in (-\infty, \infty)$
   (b) $x \in (-\infty, T)$
   (c) $x \in (T, \infty)$
   (d) $x \in (T_1, T_2)$

   - plyne z toho, zda integrál $\int_{J_i} 1/g$ konverguje nebo diverguje (to vznikají ta nekonečna). Případně nalepíme na stacionární řešení (to když NEvyjdou ta nekonečna).

   Dáváme pozor u klesajících řešení (funguje to tam naopak).
4. Prozkoumáme chování kolem nulových bodů, které ale nejsou stacionárním řešením (jaká je $\lim y'$?)
5. Načrtneme s vědomím, že je-li $y(x)$ řešením, je řešením i $y(x + c)$. Znovu prozkoumáme, co všechno lze slepit.

Příklady

Načrtněte grafy řešení.

1. (a) $y' = (y + 1)\sqrt{1 - y}$
   (b) $y' = \dfrac{e^y - 1}{\sqrt{y + 1}}$
   (c) $y' = \dfrac{(y + 1)(y + 2)}{y}$
   (d) $y' = \dfrac{(y^2 - 1)\sin(\sin y)}{y^2 \ln y}$
   (e) $y' = \dfrac{(y^2 - 1)\text{arctan}\, y}{y}$

(f) $y' = \dfrac{\sqrt{y+7}\cdot \arctan^2 y}{y-6}$

(g) $y' = e^y \sqrt[3]{\arctan y}\cdot \dfrac{y-1}{y+1}$

Zkouškové příklady

2. (a) $y' = e^y (y-1)\sqrt{e^{|y|}-1}$

   (b) $y' = \dfrac{y+1}{y+2}\ln(1-\sqrt[3]{y})$

   Najděte množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází

   i. více než jedno maximální řešení
   ii. právě jedno maximální řešení
   iii. nějaké nerostoucí řešení definované na $\mathbb{R}$
   iv. nějaké klesající maximální řešení

   (c) $y' = \tan\sqrt{y}$

   (d) $y' = \arcsin(\sin \pi y)\sqrt{\left|\ln\left(\dfrac{1}{2}+y\right)\right|}$