1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Potom

1/ je-li $0 < A < +\infty$, platí $\left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \iff g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

2/ je-li $A = 0$, platí $\left[g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ je-li $A = +\infty$, platí $\left[g \in \mathcal{L}^{*}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{*}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$".

‖ Použijte definici limity a větu 31 . ‖

Jak by bylo možné požadavky kladené na funkce f,g zeslabit ?

3,27°. Dokažte následující věty:

I/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,+\infty)$, $a > 0$.
Nechť existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^{\alpha} = A$. Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)} \iff \alpha > 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha > 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,\infty)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f = +\infty \right]$

‖ Použijte buďto cvičení 3,25 a 3,26 anebo přímo definici limity . ‖

II/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,b)$, $a,b \in E_1$.
Nechť existuje $\lim_{x\to b_-} f(x) \cdot (b-x)^{\alpha} = A$.
Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \iff \alpha < 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha < 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f = +\infty \right]$.

Vyslovte obdobné věty pro nekladné funkce !
Jak je možno oslabit předpoklady o funkci f ?

(1a) **3,28.** Dokažte, že $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$!

‖ 1/ Funkce $\dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\dfrac{1}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /věta 48/. Jelikož je tato funkce kladná, je $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{*}_{(0,+\infty)}$ /věta 33/.

2/ Protože funkce $\dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$, existuje $(R)\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, tedy $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ / věta 49/.
Jelikož v E_1 dále platí odhad $0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$
a $\dfrac{1}{x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ /věta 53 či cvič. 3,25/ , je i $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$
/věta 31/. Použitím věty 26 odtud plyne, že $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Použijeme-li cvičení 3,27 , dostáváme ze vztahů

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 = 1 , \quad \alpha = 2 > 1$$

(a)

tvrzení, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$.

4/ Jiný způsob důkazu:

jelikož jsme zjistili, že $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ existuje

/ $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ / a jelikož

$(N)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, musí mezi oběma integrály nastat rovnost /př. 3,15/ , tedy i $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ je konečný, tj. $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

5/ Použijte též cvič. 3,13 . ‖

Pochopitelně, že jsme mohli postupovat i jinak, např. využít odhadu $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pro chování integrálu v intervalu $(0,1)$; zkuste následující tvrzení dokazovat z hlediska dobrého procvičení látky - vždy všemi možnými způsoby.

3,29. Buď $\alpha \in E_1$, potom $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

‖ Použijte větu 26 a 53 . ‖

3,30. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$!

‖ 1/ Ukažte, že $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$,

2/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ dále ukažte, že $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$,

a/ poslední tvrzení dokážeme třeba následovně:

tvrdíme, že existuje takové $x_0 > 0$, že $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ pro $x > x_0$.

Jak dokážeme tuto poslední nerovnost? Zřejmě je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad \text{pro } x > x_0 .$$

Protože ale $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$, existuje např. k číslu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové x_0 /podle definice limity/ , že

$$x > x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \leq 1 + \frac{1}{2} ,$$

(b) $\int_0^1 x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a\,dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$,[1] a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

$\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$

Řešení:

Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a\,dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(1,+\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1,+\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

Závěr: Nekonverguje (absolutně) pro žádné $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^\alpha}$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

---

[1] proto nemusíme psát ve výsledku absolutní hodnotu

(1c) $\int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha} = \int_0^2 \frac{1}{y^\alpha}\, dy$ konv. dle tabulky pro $\alpha < 1$, jinak Div.

$y = 3 - x$

$dy = -1\, dx$

x	1	3
y	2	0

tvrzení, že $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$.

4/ Jiný způsob důkazu:

jelikož jsme zjistili, že $(L)\int_0^{\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$ existuje

/ $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ / a jelikož

$(N)\int_0^{\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$, musí mezi oběma

integrály nastat rovnost /př. 3,15/ , tedy i $(L)\int_0^{\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$

je konečný, tj. $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

5/ Použijte též cvič. 3,13 . ||

Pochopitelně, že jsme mohli postupovat i jinak, např. využít odhadu $0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ pro chování integrálu v intervalu $(0,1)$; zkuste následující tvrzení dokazovat z hlediska dobrého procvičení látky - vždy všemi možnými způsoby.

3,29. Buď $\alpha \in E_1$, potom $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty$.

|| Použijte větu 26 a 53 . ||

3,30. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$!

(d)

|| 1/ Ukažte, že $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$,

2/ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ dále ukažte, že $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$,

a/ poslední tvrzení dokážeme třeba následovně:

tvrdíme, že existuje takové $x_0 > 0$, že $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ pro $x > x_0$.

Jak dokážeme tuto poslední nerovnost? Zřejmě je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad \text{pro } x > x_0 .$$

Protože ale $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$, existuje např. k číslu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové x_0 /podle definice limity/ , že

$x > x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \leq 1 + \frac{1}{2}$,

(d)

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$. ‖

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

(e)

3,31.	Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ konverguje !

fci lze spoj. dodef v 0, ∀ OK ☺ → na Ept.

‖ Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův ! ‖

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} , \ \ldots$$

3,32.	Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

‖ 1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{*}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě (L) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$/

a (N) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

3,33. Dokažte, že $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x \to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}, \text{ tedy } \alpha = \tfrac{1}{2} < 1 ,$$

je podle 3,25 $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} .$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

(f) **3,34. Dokažte, že** $\int_0^1 \dfrac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

1/ Opět $\dfrac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{1}{1-x^3}(1-x) = \dfrac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

(f)

nabývá v intervalu $\langle 0,1\rangle$ kladného minima , odtud již lehko dokážete tvrzení.

4/ Spočtěte primitivní funkci F k funkci $\frac{1}{1-x^3}$ na intervalu $(0,1)$ a použije cvič. 3,13 . ‖

3,35. Dokažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \cdot \log x \in \mathcal{L}^{K}_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

‖ 1/ Ukažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}^{K}_{(0,1)}$ a $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}^{R}_{(1,+\infty)}$.

2/ Ukažte, že

a/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$, neboť

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{-\frac{5}{4}} \log x\right] \cdot x^{\frac{9}{8}} = 0 ,$$

b/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \notin \mathcal{L}_{(0,1)}$, neboť např.

$$\lim_{x\to 0_+}\left[x^{-\frac{5}{4}} \log x\right] \cdot x = -\infty .$$

3/ Ukažte, že

a/ existuje $K > 0$ tak, že $0 \leq x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{K}{x^{\frac{9}{8}}}$, pro velká x ,

b/ existuje $C > 0$ tak, že

$$x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{-C}{x} < 0 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1) .$$

4/ Nalezněte primitivní funkci a použijte 3,13 . ‖

3,36. Dokažte, že

1/ $e^{-x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ /ukažte podle 3,28 všemi způsoby, výsledek si pamatujte/ ,

2/ $\log x \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

4/ $\frac{\log(1+x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

5/ $\frac{\log x}{1-x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

6/ $\frac{\log x}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

7/ $\log \sin x \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$

8/ $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

9/ $\frac{1}{\log x} \in \mathcal{L}^{K}_{(0,1)} - \mathcal{L}_{(0,1)}$

10/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

11/ $\int_0^\infty \frac{\operatorname{artg} x}{x}\, dx = +\infty$

12/ $\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} < +\infty$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Konverguje absolutně, neb je to spojitá funkce na kompaktu, tedy je omezená.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

Pro $\alpha < -1$ tedy integrál $\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ konverguje a jeho hodnota je $\frac{1}{\alpha+1}$.

2.
$$\int_0^\infty e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(1 - \lim_{A\to\infty} e^{\alpha A}\right). \tag{4.5}$$

Tato limita existuje pro $\alpha < 0$ a neexistuje pro $\alpha \geq 0$. Dostáváme tedy:

$$\int_0^\infty e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{pro } \alpha < 0, \\ \text{diverguje} & \text{pro } \alpha \geq 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

3. Integrál $\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x} \mathrm{d}x$ budeme řešit pomocí substituce $\ln x = t$:

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x} \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ \ln e & = & 1 \\ \ln \infty & = & \infty \end{matrix} \right| = \int_1^\infty t^\alpha \mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

což je integrál, který známe z předposledního příkladu. Jeho řešení tedy dále nebudeme rozebírat. Uvedeme zde pouze výsledek – pro $\alpha < -1$ integrál $\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x} \mathrm{d}x$ konverguje a jeho hodnota je rovna $\frac{1}{\alpha+1}$, pro $\alpha \geq -1$ integrál $\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x} \mathrm{d}x$ diverguje.

Příklad 4.1.2. Rozhodněte, zda konverguje integrál

(g)

$$\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} \mathrm{d}x.$$

Řešení. U tohoto integrálu je problém ukryt v horní mezi. Jedná se tedy o základní typ nevlastního integrálu. Máme rozhodnout o konvergenci daného integrálu. Konvergenci zkusíme otestovat pomocí srovnávacího kritéria. Musíme najít nějakou vhodnou testovací funkci, resp. snažíme se najít nějakou funkci tak, abychom získali patřičnou nerovnost. V čitateli i jmenovateli máme polynomy a víme, že když $x \to \infty$, převáží nejvyšší mocniny každého z polynomů. Platí:

$$0 \leq f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x} \leq \frac{x}{x^2+2x} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Nyní můžeme použít srovnávací kritérium. Testovací integrál je

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Již víme, že tento integrál diverguje. Bohužel se jedná o situaci, ve které nedokážeme pouze za použití srovnávacího kritéria rozhodnout. Přitom je z tvaru integrálu vidět, že nerovnost mezi funkcemi se snadno převede na následující tvar:

$$\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} \mathrm{d}x \leq \int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty.$$

Tato nerovnost je ovšem splněna bez ohledu na to, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje. Srovnávací kritérium tedy selhalo.

(g) Druhou možností je limitní srovnávací kritérium. Víme, že pro velká x platí:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Tento intuitivní odhad je ovšem potřeba korektně ověřit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+2x}\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+2/x}\right) = 1 \neq 0.$$

V okolí problematického bodu se tedy obě funkce chovají stejně a protože testovací integrál diverguje, musí divergovat i integrál

$$\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\mathrm{d}x.$$

Příklad 4.1.3. Vypočítejte (pokud konverguje) integrál

$$\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejdříve rozhodneme o konvergenci, či divergenci daného integrálu. Snadno odhadneme, že když poroste x do nekonečna, převáží ve zlomku nejvyšší mocniny a po jejich zkrácení dostaneme funkci $1/x^2$ o které víme, že $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ konverguje. Odhadneme tedy, že integrál bude konvergovat. Nyní zkusíme tento předpoklad korektně ověřit.

Srovnávací kritérium není použitelné, protože pro srovnávací funkci $1/x^2$, která se sama nabízí, neplatí nerovnost

$$\frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \leq \frac{1}{x^2},$$

protože například v bodě $x = 1$ dostaneme $\frac{6}{3} \leq 1$, což není pravda. Zbývá nám tedy limitní srovnávací kritérium s naším odhadem:

$$f(x) = \frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Tento odhad snadno ověříme:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\frac{x^2}{1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5x^2}{x^3+3x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+5/x}{1+3/x-1/x^3}\right) = 1 \neq 0 \quad (4.8)$$

Podmínka limitního srovnávacího kritéria je tedy splněna a protože víme, že testovací integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konverguje, musí podle limitního srovnávacího kritéria konvergovat i zadaný integrál.

Příklad 4.1.4. Pomocí srovnávacího nebo limitního srovnávacího kritéria rozhodněte, zda následující integrály konvergují nebo divergují:

1. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ 2. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 3. $\int_1^\infty \frac{3x^3+x^2+5x+2}{2x^5+x^2+1}\mathrm{d}x$ 4. $\int_2^\infty \frac{(x-2)^2}{2x^{5/2}+x^2+3}\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ **Řešení:** Konverguje - u 0 je funkce spojitá, u ∞ srovnáme s $1/x^2$.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

(j) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

probl. body: "0", "1"

0: $(1-x)^{q-1} \approx 1$

$x^{p-1} \approx x^{p-1}$

$g(x) = x^{p-1}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim (1-x)^{q-1} = 1$$

$\int_0^{1/2} f$ K $\Leftrightarrow$ $p-1 > -1$ $\quad \boxed{p>0}$

1: $x^{p-1} \approx 1$

$g(x) = (1-x)^{q-1}$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1-} x^{p-1} = 1$$

$\int_{1/2}^1 f$ K $\Leftrightarrow$ $\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$

$y = 1-x \qquad dy = -dx \qquad \int_0^{1/2} y^{q-1}\,dy$ K $\Leftrightarrow$

x	$1/2$	1
y	$1/2$	0

$q-1 > -1$

$\boxed{q>0}$

$\boxed{\text{Záver}}$ $\int_0^1 f(x)$ K $\Leftrightarrow$ $\boxed{q, p > 0}$

25.6

$$(j) \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$$

probl. body: $0, \infty$ $\qquad f \geq 0$

"0"

$\boxed{q \geq 0}$ $\qquad 1$ je "silnější" než x^q

$$g(x) = x^p$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ \frac{1}{2} & q = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x) \ k \iff p > -1$$

$\boxed{q < 0}$ $\qquad x^q$ "silnější" než 1

$$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{x^q+1} = \lim \frac{1}{1+x^{-q}}$$

$$= 1 \qquad \int_0^2 f(x) \ k \iff \boxed{p-q > -1}$$

"∞"

$\boxed{q \geq 0}$ $\qquad x^q$ vede nad 1

$$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ 1/2 & q = 0 \end{cases}$$

(j) $\int_2^\infty f(x)$ k $\Leftrightarrow$ $p \cancel{q} - q < -1$

$\boxed{q < 0}$ 1 vede nad x^q

$g(x) = x^p$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

$\int_2^\infty f(x)$ k $\Leftrightarrow$ $p < -1$

$\boxed{\text{Závěr}}$

$\int_0^\infty f(x)$ k $\Leftrightarrow$ $q \geq 0$ & $p > -1$ & $p-q < -1$

nebo $q < 0$ & $p-q > -1$ & $p < -1$

neboli $q > p+1$ & $p > -1$

nebo $q < p+1$ & $p < -1$

(k) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

u 1 spojité,

probl. bod: ∞

u ∞ vede e^{-x}

$g(x) = e^{-x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}$ k

Nebo: $\frac{e^{-x}}{x} \le e^{-x}$ tedy ze sr. kritéria:

$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ k

(l) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,dx \qquad a, p \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a = 0}$ pak $f = 0 \Rightarrow \int f$ k
- $a \neq 0$

probl. bod: 0 proč ne π? protože nedělíme 0

$g(x) = x^{2-p}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1-\cos ax}{x^p}}{x^{2-p}} = \lim \frac{1-\cos ax}{a^2 x^2} \cdot a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0, \infty)$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{p-2}} \text{ k} \iff p-2 < 1 \Rightarrow \boxed{p < 3}$$

(m) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-y}\,y\,dy$ AK dle žáky

$\sqrt{x} = y$

$x = y^2$

$dx = 2y\,dy$

x	0	∞
y	0	∞

(m) $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$

jinak

pr. body ∞

0 ? $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-\sqrt{x}} = 1$ tedy lze spojitě rozšířit

∞: $\nexists$ mocnina taková, aby $e^{-\sqrt{x}} \approx x^\alpha$ v ∞.

když nevím, tak $\frac{1}{x^2}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ K} \Rightarrow \int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx \text{ K}$$

na $(0,1]$ je f spojitá, omezená $\Rightarrow \int\limits_0^1 f$ K

celkem $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$ K.

(n) $\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha \, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

<u>TISK TABULKY</u>

Problém. body: "∞" $\forall$

"0"? jak to u "0" vypadá?

$\lim_{x \to 0+} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF}}{=}} \pi^\alpha \in (0,\infty) \quad \forall \alpha$

→ tedy ok, funkce je tam "spojitá"

→ <u>vyjde</u> to 0 !

tedy "∞"

cíl: najít x^β tak, aby $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^\beta} \in (0,\infty)$

tip $\beta = -1 \cdot \alpha$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha}{\frac{1}{x^\alpha}} \overset{\text{VOLSF}}{=} 2^\alpha \leftarrow \in (0,\infty) \ \forall \alpha$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim \frac{-2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-1 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\int_1^\infty f \text{ k} \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ k}$$

$-\alpha < -1 \quad \boxed{\alpha > 1}$

na $(0,1]$ je f spojitá → KONV.

(o) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$

Řešení:

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vlevo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vpravo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[2]

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0, 1]$, a protože

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x \to 0+} \operatorname{arccotg}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arccotg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x \to 0+} x^a \operatorname{arccotg}^a x = 1,$$

[2]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a+b>1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1>b>1-a$. Jinak diverguje.

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\,dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1+(x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y=x-1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a>-1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x}\, dx = \int y^a\, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a + 1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

(q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.

2. Vizte tabulku s konvergencí.

3. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

4. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

45/ $\frac{x}{(1+x)^3} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

46/ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$ konverguje

47/ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$ diverguje

48/ $\int_1^2 \frac{dx}{x.\log x}$ diverguje

49/ $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ konverguje

50/ $\int_{-1}^{+1} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx$ diverguje

(3)

3,37°. I/ Buď f definována v intervalu $(a,+\infty)$. Nechť $f \in \Lambda_{(a,+\infty)}$, $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$. Nechť existuje limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Je-li $A > 0$, je $\int_a^{+\infty} f = +\infty$. Dokažte !

‖ Zřejmě $f \in \mathcal{L}^R_{(a,+\infty)}$. Podle definice limity existuje takové $x_0 > a$, že $0 < \frac{A}{2} \leq f(x)$ kdykoliv $x \geq x_0$. Tedy nutně

$$\int_a^{\infty} f \geqq \int_{x_0}^{\infty} \frac{A}{2} = +\infty \;.\|$$

Co lze říci v případě, že $A = 0$?

II/ Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geqq 0$ na $(a,+\infty)$.

Potom

1/ buďto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ neexistuje, anebo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

2/* nutně $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Uveďte příklad funkce $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geqq 0$ takové, že $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ neexistuje ! /Viz kupř. 3,52/.

Jaká je situace v případě, že není $f \geqq 0$ na $(a,+\infty)$?

3,38. Poznámka

Srovnejte výsledky předchozího cvičení 3,37 s obdobnými vlastnostmi konvergentních řad

$$/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;/\,.$$

3,39. Velmi často se stává, že funkce jejíž integrál zkoumáme, je funkcí ještě nějakého dalšího parametru, tj. jest funkcí dvou /eventuelně více/ proměnných. Pro nějaké hodnoty tohoto parametru může integrál konvergovat, pro jiné divergovat či vůbec neexistovat. Naším úkolem je pak zjistit, do jakého systému funkcí daná funkce patří pro různé hodnoty parametru.

Since $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, the Lebesgue Dominated Convergence gives

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k| - \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f_k| - |f_k - f|\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

therefore $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| \to 0$. Lastly by the integral triangle inequality

$$\left|\int_E f_k - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_k - f)\right| \leq \int_E |f_k - f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| \to 0.$$

(4) **JPE, May 2009.** Let $f \in L^1([0,1])$ be real-valued. Prove the following statements:
(a) $x^k f(x) \in L^1([0,1])$ for all $k \in \mathbb{N}$.
(b) $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$.
(c) If $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = a$ for some real number a, then

$$\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 x^k f(x)\,dx = a.$$

(a) $|x^k f(x)| \leq |f(x)|$, hence $x^k f(x) \in L^1([0,1])$.

(b) We have $x^k f(x) \to 0$ as $k \to \infty$ for all $x \in [0,1)$. Then the claim follows from Part (a) and the Lebesgue Dominated Convergence.

(c) An elegant solution exists when f is continuously differentiable. Since $\lim \frac{k+1}{k} = 1$, we can replace the factor k with $k+1$ and then integrate by parts:

$$(k+1)\int_0^1 x^k f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx^{k+1} = x^{k+1}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{k+1} f'(x)\,dx.$$

The first terms is

$$x^{k+1}f(x)\Big|_0^1 = 1^{k+1}f(1) - 0^{k+1}f(0) = a,$$

and the second converges to zero, due to Part (b).

Next we outline a solution for an arbitrary $f \in L^1([0,1])$.
(i) Choose small $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that $|f(x) - a| < \varepsilon$ for all $x \in (1-\delta, 1]$.

(ii) Show that $\lim_{k\to\infty} k \int_0^{1-\delta} x^k f(x)\,dx = 0$ by using the Lebesgue Dominated Convergence. Note that

$$\sup_{k\geq 1} \sup_{x\in[0,1-\delta)} kx^k = \sup_{k\geq 1} k(1-\delta)^k < \infty,$$

which provides an integrable upper bound. Now it is enough to prove that

$$\lim_{k\to\infty} k \int_{1-\delta}^1 x^k f(x)\,dx = a.$$