5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 2 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Najdeme podezřelé body - body nespojitosti, krajní body intervalu, nekonečna.
2. Je funkce spojitá na omezeném intervalu? Lze ji spojitě dodefinovat?
3. Je možné integrál přímo upočítat? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
4. Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^\alpha}$

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

   (i) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

   (j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^{\infty} (\pi - 2\mathrm{arctan}\ x)^{\alpha}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arcctg}^{\,a} x}{x^b}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{arctan}\ \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

2. Nechť f je definována na intervalu (a,∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a,∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^{\infty} f = \infty$.

3. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0,1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0,1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.