(1) $y = x y' - (y')^2$

$y_1(x) = x - 1 \qquad y_2 = 2x - 4$

$y_3 = -3x - 9$

(1a) $y' = 1$

$x - 1 \stackrel{?}{=} x \cdot 1 - 1^2$ ✓

(1b) $y' = 2$

$2x - 4 \stackrel{?}{=} x \cdot 2 - 4$ ✓

(1c) $y' = -3$

$-3x - 9 \stackrel{?}{=} x \cdot (-3) - 9$ ✓

1a

$y' = 2x \qquad y(1) = 2$

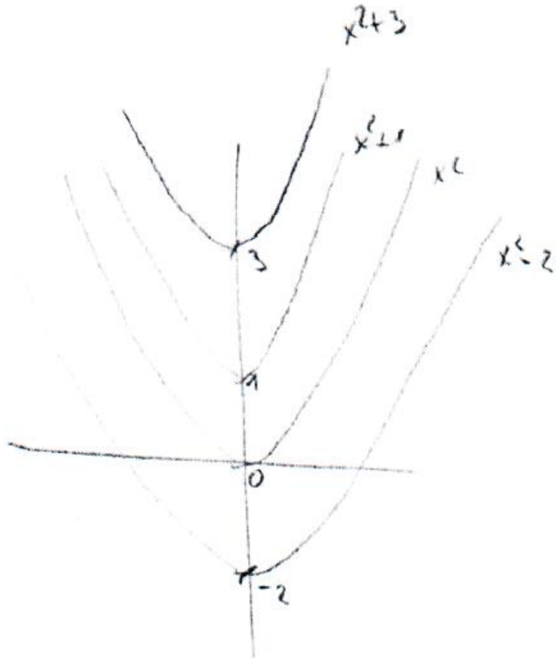
$\underline{\underline{y = x^2 + C}} \qquad x \in \mathbb{R}$
$C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 2$

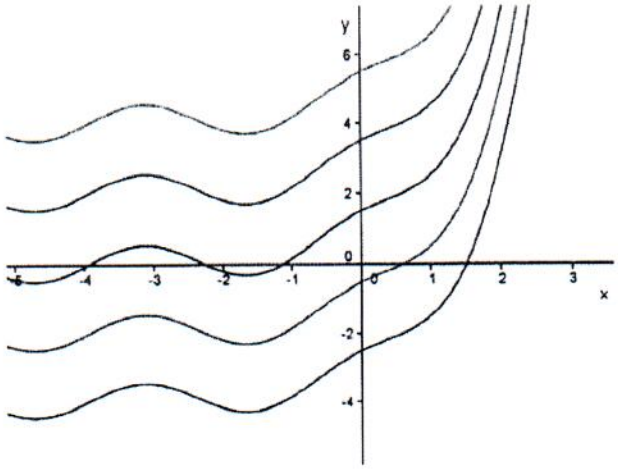
$1^2 + C = 2$

$C = 1$

$\underline{\underline{y = x^2 + 1}}$



Grafické řešení DR od zdola pro C = -4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(2b)

Příklad 2.3 $y' = \frac{1}{x-2}$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 2$

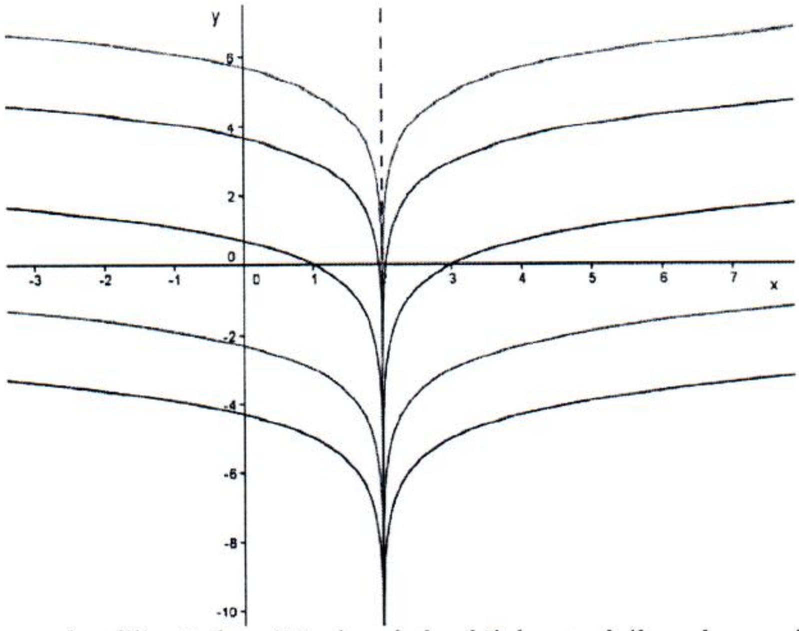
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-2}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$y = \ln|x-2| + C$$

kde $x \neq 2, C \in \mathbb{R}$.

2 b Grafické řešení DR od zdola pro C= -5, -3, 0, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 2$.

Příklad 2.4 $y' = \sqrt{3x}$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $x \geq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3x}$$

$$\int dy = \int \sqrt{3x} dx$$

$$\int dy = \sqrt{3} \int \sqrt{x} dx$$

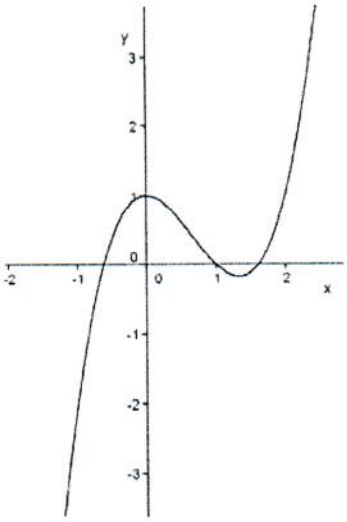
$$y = \sqrt{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{3x^3} + C$$

kde $x \geq 0, C \epsilon \mathbb{R}$.

hledané partikulární řešení je $y = x^3 - 2x^2 + 1$

Grafické řešení:



Příklad 2.7 $y' = -2\frac{1}{x^3}, y(0) = 2$

Řešení DR

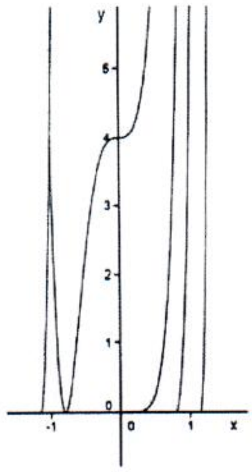
$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{1}{x^3}$$

$$\int dy = \int -2\frac{1}{x^3}dx$$

$$y = \frac{1}{x^2} + C$$

kde $x \neq 0, C\epsilon\mathbb{R}$. Nyní zjistíme hodnotu konstanty s využitím počátečních podmínek $x = 0$ a $y = 2$. Takové řešení však nenajdeme, protože do funkce nelze dosadit $x = 0$. Hledané partikulární řešení neexistuje. Tuto rovnici jsme ani nemuseli řešit, protože je vidět ze zadání podmínka $x \neq 0$ a počáteční podmínka $y(0) = 2$ a takovou úlohu nemá smysl řešit.

Grafické řešení pro C = -3, -1, 0, 1, 3:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $y > 0$.

(3a)

Příklad 3.13 $\frac{y'}{y^2} = e^x$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^x dx$$

$$-\frac{1}{y} = e^x + C$$

řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

nyní musíme stanovit podmínku ($e^x + C \neq 0$)

$$e^x + C \neq 0$$

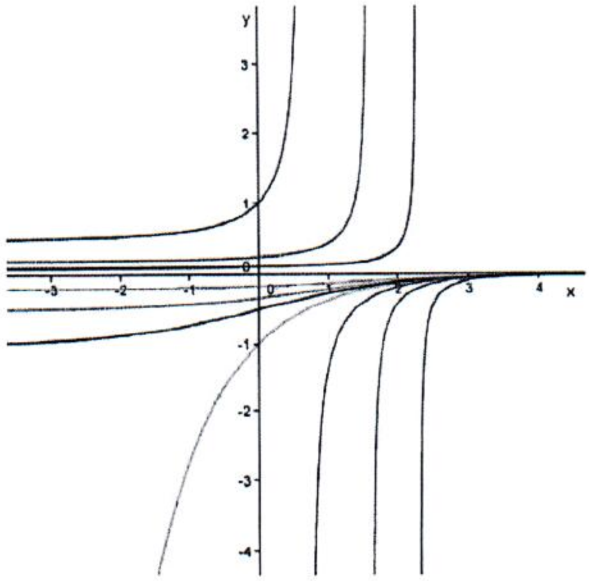
$$e^x \neq -C$$

pro $C \geq 0$ je podmínka vždy splněna a pro $C < 0$ existuje jedno x, pro které řešení $y = -\frac{1}{e^x + C}$ není definováno $x = \ln(-C)$, řešením pak jsou všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ pro $C \geq 0$, nebo $x \in \mathbb{R} - \{\ln(-C)\}$ pro $C < 0$.

Grafické řešení pro C = -10, -5, -2, 0, 1, 2, 5:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

$y(0) = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} = -\frac{1}{e^0 + c} \Rightarrow 1 + c = -2, \quad c = -3 \quad y = -\frac{1}{e^x - 3}$

Příklad 3.14 $\qquad y^4 y' = 2x^4$

Řešení DR

$$y^4 \frac{dy}{dx} = 2x^4$$

$$\int y^4 dy = \int 2x^4 dx$$

(3b)

Příklad 3.2 $y^2y' = x - 2$

Řešení DR

$$y^2\frac{dy}{dx} = x - 2$$

$$\int y^2 dy = \int (x-2)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 6x + 3C$$

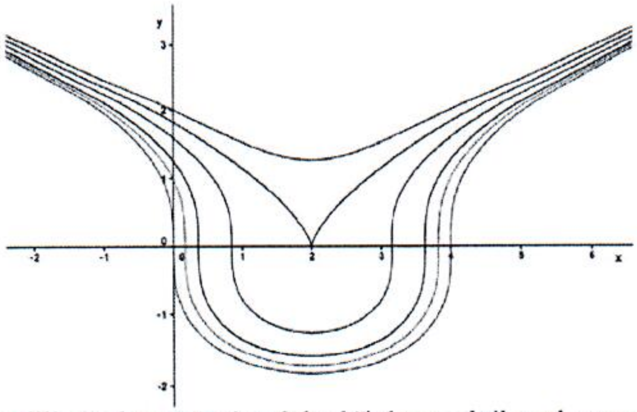
$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + 3C}$$

protože konstanta vynásobená reálným číslem je opět konstanta, budeme psát jednodušeji místo $3C$ pouze konstantu C. (U dalších příkladů již budu rovnou přecházet ke konstantě C, bez dalších komentářů.)

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C = 0, 1, 2, 4, 6, 8$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(3c)

Příklad 3.3 $\frac{y'}{y} = 4x$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4x dx$$

$$\ln|y| = 2x^2 + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2x^2+C}$$

$$|y| = e^{2x^2+C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{2x^2}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, protože $C \in \mathbb{R}$, $e^c \in (0;\infty)$ a $-e^c \in (-\infty;0)$, pak konstanta K nabývá hodnot $K \in (-\infty;0) \cup (0;\infty) \Rightarrow K \neq 0$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

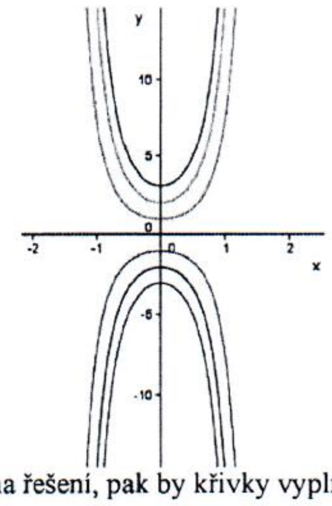
pak $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.

$y(0) = 3$

$3 = ke^0$ $k = 3$

$\rightarrow y = 3e^{2x^2}$

Grafické řešení pro K =-3, -2, -1, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

3d

Příklad 3.4 $y' = 4xy$

Řešení DR

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

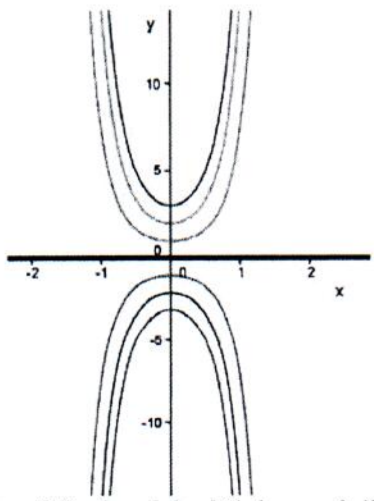
V předchozím kroku jsme dělili rovnici y a musíme stanovit podmínku $y \neq 0$, tím se připravíme o jedno řešení (singulární řešení) – nulovou funkci. (Derivace nulové funkce je rovna nule, $y = 0$ a $y' = 0$ rovnici $y' = 4xy$ vyhovují.)

Řešení upravené rovnice je totožné s řešením př. 2, vyšlo nám $y = K \cdot e^{2x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Nyní se podíváme, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

3e

Příklad 3.6 $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$

Řešení DR

musíme určit podmínku, že $x \neq 1$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x-1|+C}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{\ln|x-1|}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot (x-1)$$

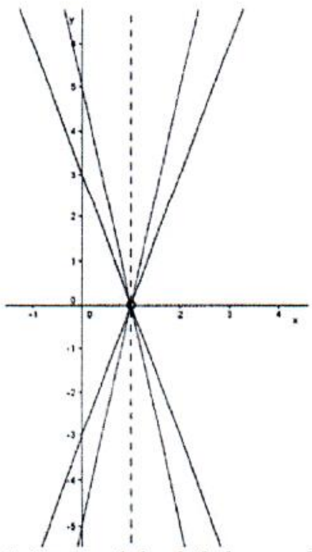
kde $x \neq 1$, $C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$

$$y = K \cdot (x-1)$$

pak $x \neq 1$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro K =-5, -3, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $y = 0$ a $x = 1$.

(3f)

Příklad 3.7 $y^2 y' = \cos x$

Řešení DR

$$y^2 \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\int y^2 dy = \int \cos x \, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \sin x + C$$

$$y^3 = 3 \sin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3 \sin x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

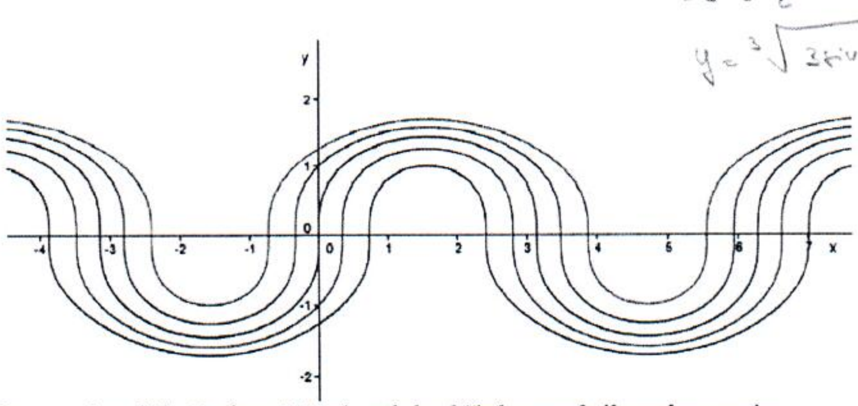
$y(0) = -2$

$-2 = \sqrt[3]{0 + C}$

$-8 = C$

$y = \sqrt[3]{3 \sin x + C}$

Grafické řešení pro C =-2, -1, 0, 1, 2



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(3g)

Příklad 3.8 $e^y y' = 1$

Řešení DR

$$\int e^y dy = \int dx$$

$$e^y = x + C$$

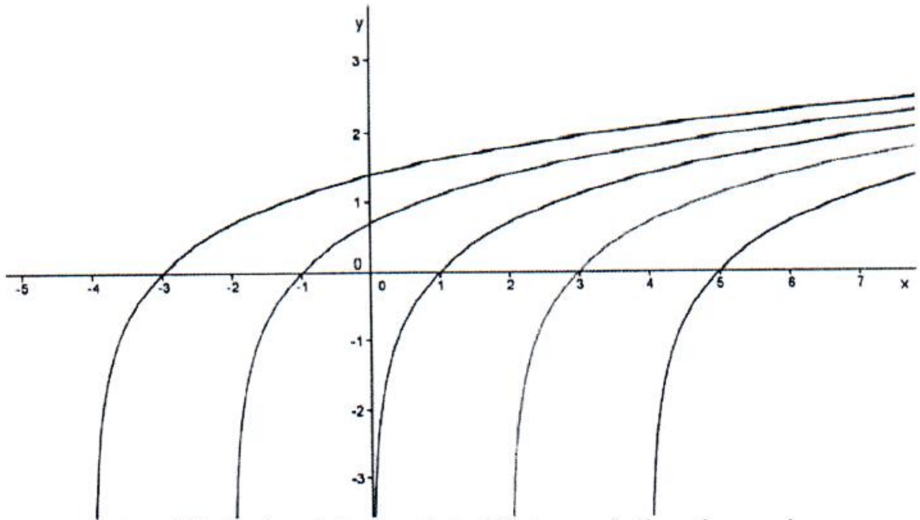
$$\ln e^y = \ln(x + C)$$

$$y = \ln(x + C)$$

kde $x > -C, C \in \mathbb{R}$.

(39)

Grafické řešení pro C =-4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.9 $y' = y$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = \pm e^{x+C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{x}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$

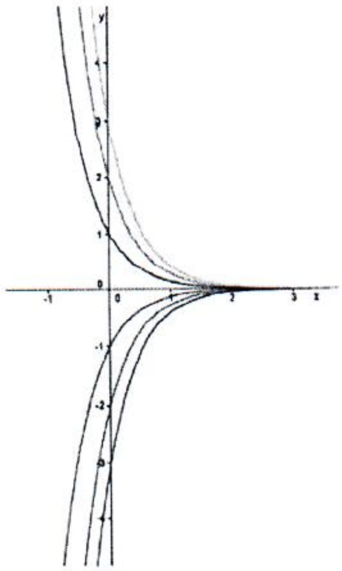
$$y = K \cdot e^{x}$$

podíváme se zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{x}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{x} \text{ a } y = 0$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K =-3, -2, -1, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

(3a)

Příklad 3.11 $xy' - y = 0$

Řešení DR

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$ a přibude podmínka $x \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$$|y| = Cx$$

$$y = \pm Cx$$

(3a)

kde $x \neq 0, C \neq 0$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = Kx.$$

Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = Kx$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

$$x(Kx)' - Kx = 0$$

$$Kx - Kx = 0$$

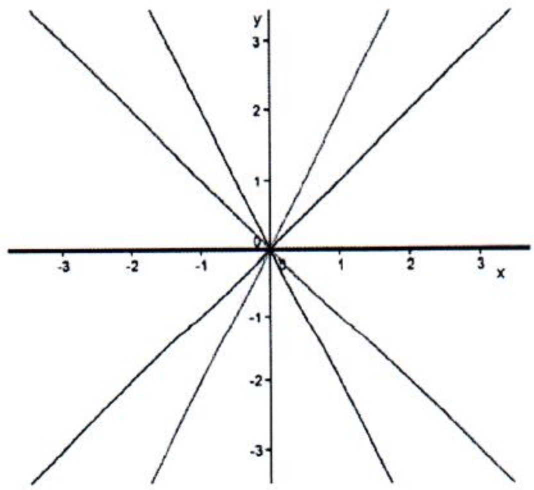
$$0 = 0.$$

Nyní se podíváme zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = Kx$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -2, -1, 0, 1, 2



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

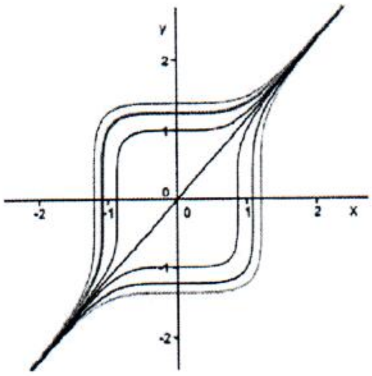
$$\frac{y^5}{5} = \frac{2x^5}{5} + C$$

$$y^5 = 2x^5 + C$$

$$y = \sqrt[5]{2x^5 + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.15 $\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 0$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$$

$$|y| = x^2 \cdot C$$

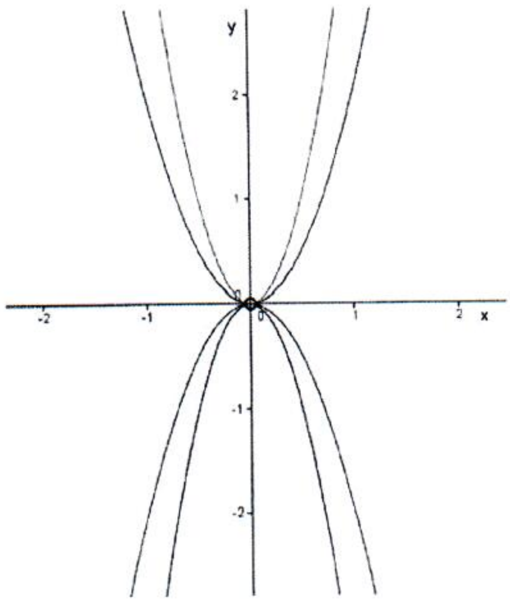
$$y = \pm C \cdot x^2$$

zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a $K \neq 0$, pak řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \cdot x^2$$

kde $x \neq 0, K \neq 0.$

Grafické řešení pro K = -4, -2, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = 0, y = 0.$

Příklad 3.16 $\quad 2yy' = -\sin x$

Řešení DR

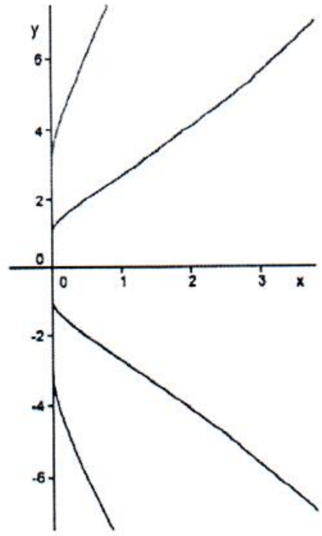
$$2y\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$2\int y dy = \int -\sin x\, dx$$

$$2\frac{y^2}{2} = \cos x + C$$

$$y^2 = \cos x + C$$

Grafické řešení pro K = -3, -1, 1, 3, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $x \geq 0$ a přímku $y = 0$.

Příklad 3.18 $\quad xy' - \frac{y}{x+1} = 0$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku pro $x \neq -1$

$$xy' = \frac{y}{x+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+1)}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$, musíme určit tyto podmínky $x \neq 0$ a $x \neq -1$ a pravou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = Ax + A + Bx$$

x^0: $1 = A$

x^1: $0 = A + B$

$0 = 1 + B$

$B = -1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{Cx}{x+1}\right|$$

$$|y| = \frac{Cx}{x+1}$$

$$y = \pm\frac{Cx}{x+1}$$

nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$, kde $K \neq 0$. Řešením budou všechny funkce:

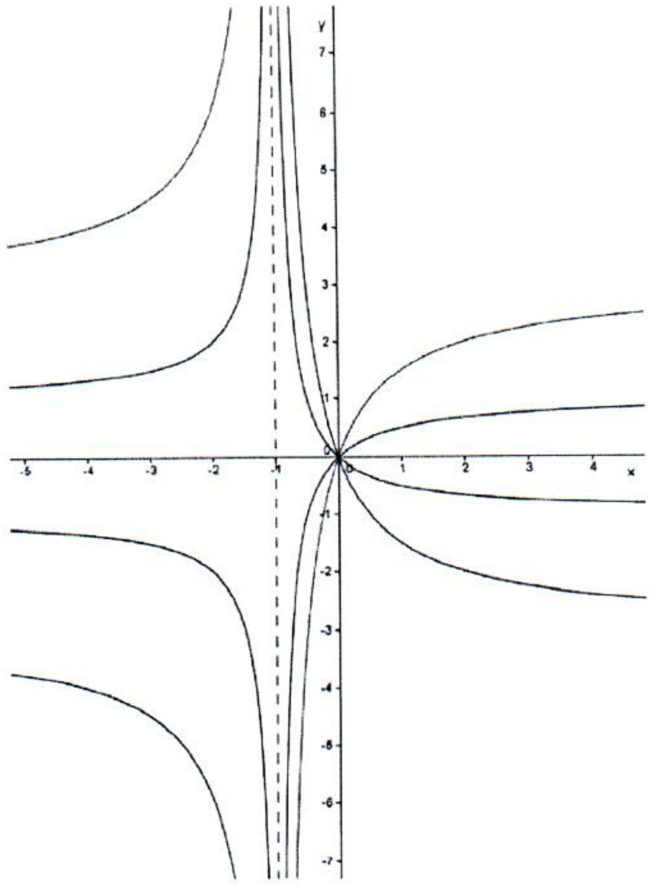
$$y = \frac{Kx}{x+1}.$$

Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{Kx}{x+1}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Protože ze zadání neplyne podmínka, že $x \neq 0$ je nutné tuto podmínku ověřit (viz příklad 3.11- nechť čtenář ověří sám), po ověření $\Rightarrow x = 0$ a řešením jsou všechny funkce

$$y = \frac{Kx}{x+1}$$

kde $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -3, -1, 1, 3, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = -1$.

Příklad 3.19 $\quad xy' + y + y^2 = 0$

Řešení DR

$$xy' = -y - y^2$$

$$y' = -\frac{y + y^2}{x}$$

$$\frac{y'}{y(1+y)} = -\frac{1}{x}$$

(32)

$$\frac{1}{y(1+y)}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o dvě (singulární) řešení $y=0$ $y=-1$, určíme podmínku $x\neq 0$ a levou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{y(1+y)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{1+y}$$

$$1=A+Ay+By$$

x^0: $1=A$

x^1: $0=A+B$

$0=1+B$

$B=-1$

$$\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{1}{1+y}dy=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y|-\ln|1+y|=-\ln|x|+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\left|\frac{y}{1+y}\right|=\frac{C}{x}$$

$$\frac{y}{1+y}=\pm\frac{C}{x}$$

nyní určíme novou konstantu $K=\pm C$ a $K\in\mathbb{R}$

$$\frac{y}{1+y}=\frac{K}{x}$$

$$y=\frac{K}{x}+\frac{K}{x}y$$

$$y-\frac{K}{x}y=\frac{K}{x}$$

$$y\left(1-\frac{K}{x}\right)=\frac{K}{x}$$

$$y=\frac{K}{x\left(1-\frac{K}{x}\right)}$$

$$y=\frac{K}{x-K}.$$

Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{K}{x-K}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$, ale vhodnou volbou konstanty K nezískáme řešení $y = -1$, připíšeme jej zvlášť. Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = \frac{K}{x-K}$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

$$x\left(\frac{K}{x-K}\right)' + \frac{K}{x-K} + \left(\frac{K}{x-K}\right)^2 = 0$$

$$x\left(\frac{-K}{(x-K)^2}\right) + \frac{K}{x-K} + \frac{K^2}{(x-K)^2} = 0$$

$$\frac{-xK}{(x-K)^2} + \frac{xK - K^2 + K^2}{(x-K)^2} = 0$$

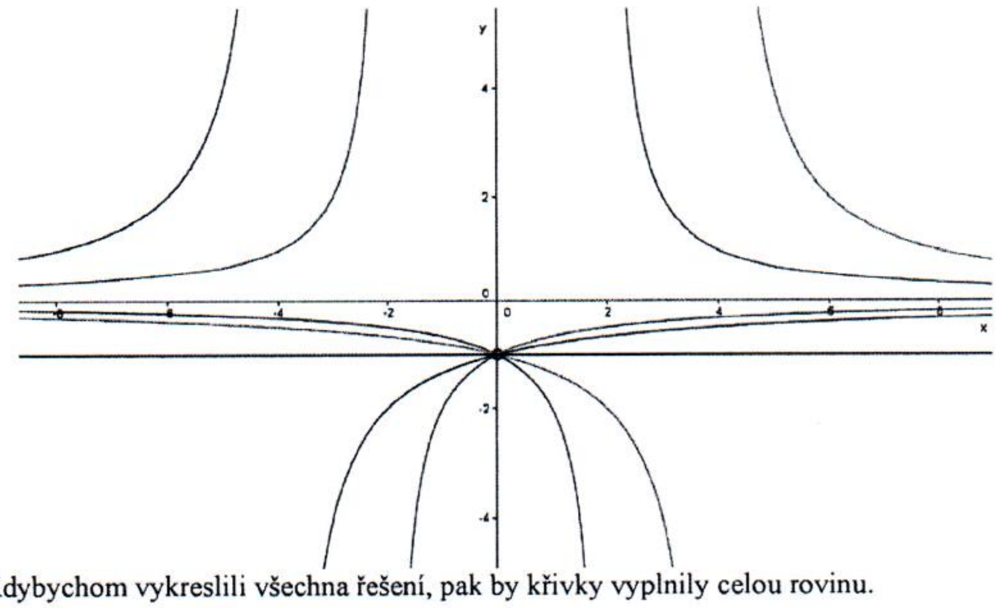
$$0 = 0$$

řešením jsou všechny funkce:

$$y = \frac{K}{x-K} \text{ a } y = -1$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \neq K$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -4, -2, 2, 4, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(3e)

Příklad 3.20 $\frac{1}{y+1}y' = \operatorname{cotg} x$

Řešení DR

ze zadání vidíme, že je nutné vyřadit funkci $y = -1$ z řešení

$$\frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int \operatorname{cotg} x dx$$

Vsuvka: $\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

$$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

$$|y+1| = C \sin x$$

$$y + 1 = \pm C \sin x$$

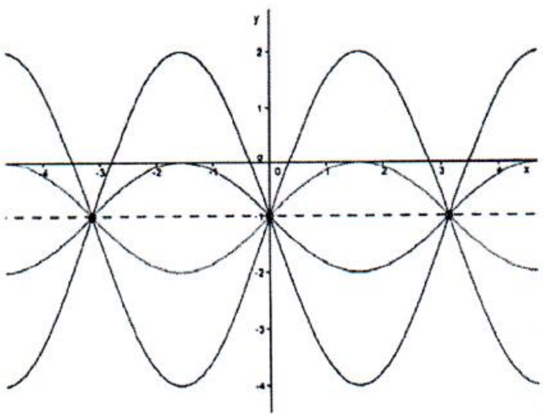
nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$.

$K \neq 0$, protože bychom dostali funkci $y = 0 \cdot \sin x - 1$ a po úpravě funkci $y = -1$, to je podmínka ze zadání. Určíme podmínku $x \neq k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \sin x - 1$$

kde $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro K = -3, -1, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = -1$.

Diferenciální rovnice – separace proměnných

verze 1.1

1 Úvod

Následující text popisuje řešení diferenciálních rovnic, konkrétně metodu separace proměnných. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT1 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Teorie

Budeme se zabývat rovnicí

$$y' = f(x)g(y)$$

na otevřené množině $\Omega = (a,b) \times (c,d)$. Lze snadno nahlédnout, že tato rovnice má triviální řešení $y_0 =$ konst. takové, že $g(y_0) = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, lze psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)\,,$$

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Obě proměnné jsme separovali, na jednu stranu rovnice jsme dali vše s x, na druhou stranu rovnice vše s y, formálně včetně diferenciálů. Poté jsme obě strany rovnice zintegrovali. Vyřešením integrálů můžeme nalézt řešení diferenciální rovnice.

(4a)

3 Příklady

Příklad 3.1. *Najděte řešení rovnice $y' = -y \operatorname{cotg} x$*

Řešení: Separujeme proměnné a rovnici integrujeme.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po integraci dostáváme

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu, kterou jsme zapsali ve tvaru $\ln C$. Po odlogaritmování dostáváme

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\,.$$

V argumentu logaritmů píšeme absolutní hodnotu, aby definiční obor celého výrazu byl stejný před integrací i po ní.

(4b) **Příklad 3.2.** *Najděte řešení rovnice* $(x-1)y' + y^2 = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(2) = -1$.

Řešení: Rovnici si upravíme do tvaru

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2\,,$$

což vede k

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\,.$$

Po integraci dostáváme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}\,.$$

Absolutní hodnotu psát nemusíme, protože nás kvůli počáteční podmínce zajímá jen $x > 1$. Nyní dosadíme počáteční podmínku, z čehož zjistíme konstantu C.

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C} \quad \Rightarrow \quad C = 1\,.$$

Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}\,.$$

(4c) **Příklad 3.3.** *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

Řešení: Pokračujeme obdobně jako v předchozích příkladech.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po integrování máme

$$\ln(\sin y) = -\ln\cos x + \ln C \quad \Rightarrow \quad \sin y = \frac{C}{\cos x}\,.$$

Odsud $y(x) = \arcsin\frac{C}{\cos x}$.

Další příklady uvedeme už bez komentáře.

(4d) **Příklad 3.4.** *Najděte řešení rovnice* $y' \sin x = y \cos x$.

(4d) *Řešení:*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\,,\\ \ln|y| &= \ln|\sin x| + \ln C\,,\\ y &= C\sin x\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.5. *Najděte řešení rovnice* $x^2y' - y^2 = 1$.

(4e) *Řešení:*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\,,\\ \operatorname{arctg} \mathrm{x} &= -\frac{1}{x} + C\,,\\ y &= \operatorname{tg}\left(C - \frac{1}{x}\right)\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.6. *Najděte řešení rovnice* $2xyy' = x + 2$.

(4f) *Řešení:*

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}y &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,,\\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x}{2} + \ln|x| + C\,,\\ y &= \pm\sqrt{x + 2\ln|x| + C}\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.7. *Řešte rovnici* $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$.

(4g) *Řešení:*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\,,\\ \ln|x^2-1| &= \ln|y^2| + 1 + \ln C\\ 1 + y^2 &= C(x^2-1)\,,\\ y &= \pm\sqrt{C(x^2-1)-1}\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.8. *Řešte rovnici* $xyy' = 1 - x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}y &= \int\left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x\,,\\ \frac{y^2}{2} &= \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C\,,\\ y &= \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C_1}\,.\end{aligned}$$

(4a)

Příklad 3.9. *Řešte rovnici* $xy + (x+1)y' = 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = -\int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\,,\\ \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C\,,\\ y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,.\end{aligned}$$

Příklad 3.10. *Řešte rovnici* $\sqrt{y^2+1} = xyy'$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,\\ \sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C\,,\\ y = \pm\sqrt{(C+\ln|x|)^2 - 1}\,.\end{aligned}$$

4 Rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Tato rovnice lze převést na rovnici se separovanými proměnnými substitucí $z(x) = ax + by + c$. Odsud dostáváme $y' = \frac{z'-a}{b}$. Dosadíme-li tento výraz zpět do původní rovnice, dostaneme rovnici

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} = \mathrm{d}x\,,$$

kterou vyřešíme integrací.

Příklad 4.1. *Vyřešte rovnici* $y' = y - 3x + 5$

Řešení: Zřejmě použijeme $f(z) = z = y - 3x + 5$, odsud $z' = y' - 3$, tj. $z' = z - 3$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}z}{z-3} = \int \mathrm{d}x\,,\\ \ln|z-3| = x + \ln C\,,\\ z(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + 3\,,\\ y(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + 3x - 2\,.\end{aligned}$$

Příklad 4.2. *Vyřešte rovnici* $y' = -(x-y)^2$

Řešení: Zvolíme $z = x - y$, $z' = 1 - y'$, $f(z) = -z^2$. Po substituci obdržíme

$$\begin{aligned}1 - z' = -z^2\,,\\ \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int \mathrm{d}x\,,\\ \operatorname{arctg} z = x + C\,,\\ z = \operatorname{tg}(x+C)\,,\\ y(x) = x - \operatorname{tg}(x+C)\,.\end{aligned}$$

(5a) $y' = xe^x y$ $\qquad y(1) = 1$

Stac. $y \equiv 0$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int xe^x\,dx$$

Per. p. $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$
$u' = 1 \quad v = e^x$
$= xe^x - e^x$

$\ln|y| = xe^x - e^x + k \qquad k \in \mathbb{R}$

$|y| = k\,e^{xe^x - e^x} \qquad k > 0$

$y = k\,e^{e^x(x-1)} \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

podm.: $y(1) = 1$ stac. nelze, splnit tady ne

$1 = y(1) = k\,e^{e^1(1-1)} \qquad k = 1$

pak $y = e^{e^x(x-1)} \qquad x \in \mathbb{R}$

(5b) $y' = xy(y+2)$

mult. řešení: $y \equiv 0$

$y \equiv -2$

$$\int \frac{1}{y(y+2)}\,dy = \int x\,dx \qquad \int \frac{1}{y(y+2)}\,dy = \int \frac{-1/2}{y+2} + \frac{1/2}{y}\,dy$$

$$-\frac{1}{2}\ln|y+2| + \frac{1}{2}\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + k$$

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = ke^{x^2} \qquad k>0$$

$$\frac{y}{y+2} = ke^{x^2} \qquad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$y(1-ke^{x^2}) = 2ke^{x^2}$$

$$y = \frac{2ke^{x^2}}{1-ke^{x^2}} \qquad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$k=0$ OK

$1-ke^{x^2} \neq 0 \qquad \frac{1}{k} \neq e^{x^2} \qquad k<0$ OK

$\ln\frac{1}{k} \neq x^2 \qquad k>0$

$\pm\sqrt{\ln\frac{1}{k}} \neq x$

tedy: $y \equiv 0$

$y \equiv -2$

$$y = \frac{2ke^{x^2}}{1-ke^{x^2}} \qquad k<0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$k>0 \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{\ln\frac{1}{k}})$

$x \in (-\sqrt{\ln\frac{1}{k}}, \sqrt{\ln\frac{1}{k}})$

$x \in (\sqrt{\ln\frac{1}{k}}, \infty)$

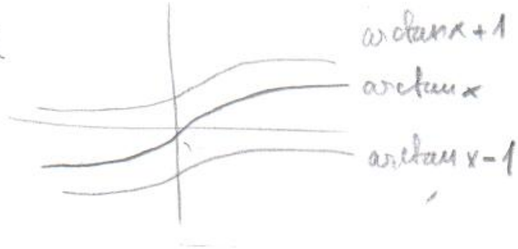
(5c) $y'(1+x^2) = 1+y^2$

nemá stac. řešení

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\arctan y = \arctan x + k \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$y = \tan(\underbrace{\arctan x + k}_{\in(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2})})$$



dává smysl jen pro $-\pi < k < \pi$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arctan x + k \le \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\left(-k-\frac{\pi}{2}\right) \le x \le \tan\left(\frac{\pi}{2}-k\right)$$

Závěr

$y = \tan(\arctan x + k)$ $\quad 0<k<\pi \quad x\in\left(-\infty, \tan\left(\frac{\pi}{2}-k\right)\right)$

$0>k>-\pi \quad x\in\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-k\right), \infty\right)$

$y = \tan(\arctan x) = x \qquad k=0 \qquad x\in\mathbb{R}$

(5d) $y' = \sin x \sin y \qquad y(0) = \frac{\pi}{2}$

- nulové body: $\sin y = 0 \qquad y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int \sin x \, dx \qquad \int \frac{1}{\sin y} = \int \frac{\sin y}{1-\cos^2 y}\, dy = \int \frac{-1}{1-z^2}\, dz$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos y}{1-\cos y} \right| = -\cos x + k_1 \qquad k \in \mathbb{R} \qquad z = \cos y, \quad dz = -\sin y\, dy$$

$$\ln \left| \frac{1+\cos y}{1-\cos y} \right| = 2\cos x + k \qquad = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos y}{1-\cos y} \right|$$

$$\left| \frac{1+\cos y}{1-\cos y} \right| = e^k e^{2\cos x} \qquad \cos y \neq 1 \to y \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1+\cos y}{1-\cos y} = k e^{2\cos x} \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$1 + \cos y = k e^{2\cos x} - \cos y \, k e^{2\cos x}$$

$$\cos y \left(1 + k e^{2\cos x}\right) = k e^{2\cos x} - 1$$

$$\cos y = \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1} \qquad k e^{2\cos x} + 1 \neq 0$$

$$y = \arccos \underbrace{\frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}}$$

$$-1 \leq \qquad \leq 1$$

lze převést: $-1 \leq \frac{t-1}{t+1} \leq 1$

- $t+1 > 0 \quad -t-1 \leq t-1 \leq t+1$ (ok) $\quad 0 \leq 2t \qquad$ tedy pro $k > 0$ ok
- $t+1 < 0 \quad -t-1 \geq t-1 \geq t+1$ nelze

Tedy $\quad y = \arccos \dfrac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1} \qquad k > 0$

nebo $\quad y = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Podmínka: $\quad y(0) = \dfrac{\pi}{2} \qquad y = k\pi$ nelze

$$\arccos \frac{k e^{2} - 1}{k e^{2} + 1} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{k e^{2} - 1}{k e^{2} + 1} = 0 \qquad \boxed{k = \frac{1}{e^{2}}}$$

Závěr: $\quad y(x) = \arccos \dfrac{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} - 1}{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} + 1} \qquad x \in \mathbb{R}$

Chapter 3

Applications of first-order ODEs

Contents

(6)

3.1 Radioactivity and Carbon dating

There are three isotopes of Carbon: ^{12}C, ^{13}C and ^{14}C. Almost all Carbon is made up of the first two (^{12}C and ^{13}C) because ^{14}C is radioactive: it decays with a half-life of 5730 years to form ^{14}N. Although it decays quite quickly, it is constantly being produced in the upper atmosphere by the action of cosmic rays. The equilibrium level of ^{14}C is about 1 part per trillion (10^{12}).

When an organism dies, it ceases to absorb Carbon from the environment, so the amount of ^{14}C it contains will decrease as this decays radioactively. The time since the death of the organism can be estimated by measuring how much ^{14}C there is left.

Let $x(t)$ be the proportion of ^{14}C at time t. In a short interval δt, the concentration will decrease by an amount proportional to how much is left, and to the length of the time interval:

$$x(t + \delta t) = x(t) - kx(t)\delta t$$

where k is a positive constant. Rearranging:

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = -kx$$

and taking the limit of small δt (see chapter 1):

$$\frac{dx}{dt} = -kx \qquad \text{with } x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

We can solve this separable first-order ODE:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx &= -\int k\,dt + C \\ \log|x| &= -kt + C \\ |x| &= e^C e^{-kt}\end{aligned}$$

Use the fact that $x > 0$ and set $A = e^C$:

$$x = Ae^{-kt}$$

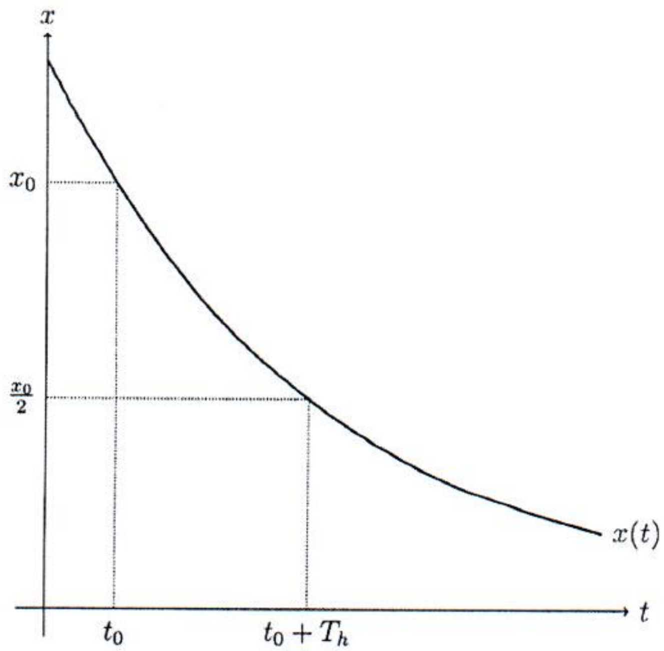
We can now use the initial condition $x(t_0) = x_0$ to find A:

$$x_0 = Ae^{-kt_0}, \qquad A = x_0 e^{kt_0}$$

which results in the solution for $x(t)$:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

Graphically:



The **half-life** T_h is the time after which half of the ^{14}C has decayed. So, from (3.2), at time $t_0 + T_h$:

$$x(t_0 + T_h) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(t_0+T_h-t_0)} = x_0 e^{-kT_h}.$$

or

$$T_h = \frac{1}{k}\log 2.$$

For ^{14}C, $T_h = 5730$ years, so $k = \frac{1}{T_h}\log 2 = 0.000121/\text{year}$.

Example: A fossilised bone is found to contain 0.1% of its original ^{14}C. Find the age of the fossil.

Solution: Let t be today's date, and suppose the fossil is T years old, so it was fossilised at time $t_0 = t - T$. At this time it had x_0 ^{14}C, and now it has $0.001x_0$.

$$x(t) = 0.001x_0 = x_0e^{-k(t-t_0)} = x_0e^{-kT},$$

which we can solve for T:

$$T = -\frac{1}{k}\log 0.001 = \frac{1}{k}\log 1000 = 57100\,\text{years}.$$

Example: A nuclear breeder reactor produces waste that contains (amongst other things) the isotope ^{239}Pu (Plutonium-239). After 15 years, the initial concentration of ^{239}Pu in the waste has decreased by 0.043%. Find the half-life of the isotope.

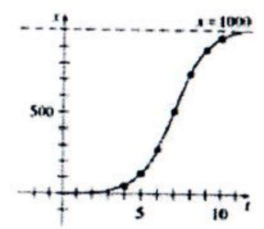
Solution:

Example: A sample of thread contains 10^{10} atoms of ^{14}C. How many disintegrations per second will there be?

Solution: $\frac{dx}{dt} = -kx$, so there are 0.000121×10^{10} disintegrations per year, or 0.04 disintegrations per second.

7

FIGURE 3.2.2 Logistic curves for different initial conditions



(a)

t (days)	x (number infected)
4	50 (observed)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

(b)

FIGURE 3.2.3 Number of infected students in Example 1

number of individuals infected with the disease at time t.

EXAMPLE 1 Logistic Growth

Suppose a student carrying a flu virus returns to an isolated college campus of 1000 students. If it is assumed that the rate at which the virus spreads is proportional not only to the number x of infected students but also to the number of students not infected, determine the number of infected students after 6 days if it is further observed that after 4 days $x(4) = 50$.

SOLUTION Assuming that no one leaves the campus throughout the duration of the disease, we must solve the initial-value problem

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1.$$

By making the identification $a = 1000k$ and $b = k$, we have immediately from (5) that

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Now, using the information $x(4) = 50$, we determine k from

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

We find $-1000k = \frac{1}{4}\ln\frac{19}{999} = -0.9906$. Thus

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Finally,

$$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ students.}$$

Additional calculated values of $x(t)$ are given in the table in Figure 3.2.3(b). Note that the number of infected students $x(t)$ approaches 1000 as t increases.