tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, která má řešení $\lambda = 2$. Tedy jedno řešení homogenní rovnice je $u_1(k) = 2^k$. Protože je $\lambda = 2$ dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, je druhé řešení homogenní rovnice rovno $u_2(k) = 2^k k$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = C_1 2^k + C_2 2^k k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože pravá strana nehomogenní diferenční rovnice má speciální tvar, můžeme najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 5$ ani $\mu = -1$ nejsou kořeny charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = 5^k a + (-1)^k b$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme $a = \dfrac{1}{3}$ a $b = 1$. Tedy jedno řešení nehomogenní rovnice je $w(k) = \dfrac{1}{3}\,5^k + (-1)^k$. Proto je obecné řešení dané diferenční rovnice

$$x(k) = C_1 2^k + C_2 2^k k + \frac{1}{3}\,5^k + (-1)^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1a)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 8x(k) = 4^k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení homogenní rovnice $u(k+2) + 2u(k+1) - 8u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Abychom našli řešení homogenní rovnice, stačí určit její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, která má řešení $\lambda = 2$ a $\lambda = -4$. Tedy dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $u_1(k) = 2^k$ a $u_2(k) = (-4)^k$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = C_1 2^k + C_2 (-4)^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože pravá strana nehomogenní diferenční rovnice má speciální tvar, můžeme najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 4$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = 4^k a$, kde a je konstanta. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme $a = \dfrac{1}{16}$, a tedy $w(k) = 4^{k-2}$. Proto je obecné řešení dané diferenční rovnice

$$x(k) = C_1 2^k + C_2 (-4)^k + 4^{k-2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 9x(k) = 2 - k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) - 9u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její

nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3 \Longrightarrow u_1(k) = 3^k\,,\ u_2(k) = (-3)^k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + (-3)^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 0$ ani $\mu = 2$ nejsou kořeny charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = ak + b + 2^k c$, kde a, b a c jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -\frac{1}{8}\,,\ b = -\frac{1}{32}\,,\ c = \frac{1}{5} \Longrightarrow w(k) = -\frac{4k+1}{32} + \frac{2^k}{5} \Longrightarrow x(k) = 3^k C_1 + (-3)^k C_2 - \frac{4k+1}{32} + \frac{2^k}{5}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 9x(k) = \cos\frac{k\pi}{2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) - 9u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3 \Longrightarrow u_1(k) = 3^k\,,\ u_2(k) = (-3)^k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + (-3)^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = i$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = a\cos\frac{k\pi}{2} + b\sin\frac{k\pi}{2}$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -\frac{1}{10}\,,\ b = 0 \Longrightarrow w(k) = -\frac{1}{10}\cos\frac{k\pi}{2} \Longrightarrow x(k) = 3^k C_1 + (-3)^k C_2 - \frac{1}{10}\cos\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1b)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$3x(k+2) - 4x(k+1) + x(k) = 2 - k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $3u(k+2) - 4u(k+1) + u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme řešení homogenní rovnice hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

(1b)

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow u_1(k) = 1\,,\ u_2(k) = 3^{-k}\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = C_1 + 3^{-k} C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 1$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = k(ak+b)$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -\frac{1}{4}\,,\ b = 2 \Longrightarrow w(k) = \frac{k(8-k)}{4} \Longrightarrow x(k) = C_1 + 3^{-k} C_2 + \frac{k(8-k)}{4}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1c)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$3x(k+2) - 4x(k+1) + x(k) = \cos\frac{k\pi}{2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní diferenční rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $3u(k+2) - 4u(k+1) + u(k) = 0$. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$. Když dosadíme tento tvar řešení do homogenní rovnice, získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (3\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0\,.$$

Její kořeny jsou $\lambda = 1$ a $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 + C_2 3^{-k}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ještě zbývá najít partikulární řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože rovnice má konstantní koeficienty a pravá strana má speciální tvar, budeme hledat partikulární řešení odhadem. Neboť číslo i není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $w(k) = a\cos\dfrac{k\pi}{2} + b\sin\dfrac{k\pi}{2}$, kde a a b jsou konstanty. Protože je

$$w(k+2) = -a\cos\frac{k\pi}{2} - b\sin\frac{k\pi}{2} \quad \text{a} \quad w(k+1) = -a\sin\frac{k\pi}{2} + b\cos\frac{k\pi}{2}\,,$$

dostaneme po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u nezávislých funkcí pro a a b soustavu dvou algebraických rovnic

$$-2a - 4b = 1\,,\ 4a - 2b = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{10}\,,\ b = -\frac{1}{5} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow w(k) = -\frac{1}{10}\left(\cos\frac{k\pi}{2} + 2\sin\frac{k\pi}{2}\right).$$

Tedy obecné řešení dané diferenční rovnice je

(1c)

$$x(k) = C_1 + C_2 3^{-k} - \frac{1}{10}\left(\cos\frac{k\pi}{2} + 2\sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 6x(k+1) + 9x(k) = 2 - k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) - 6u(k+1) + 9u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme řešení homogenní rovnice hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow u_1(k) = 3^k\,,\ u_2(k) = 3^k k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + 3^k k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = ak + b$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -\frac{1}{4}\,,\ b = \frac{1}{4} \Longrightarrow w(k) = \frac{1-k}{4} \Longrightarrow x(k) = 3^k C_1 + 3^k k C_2 + \frac{1-k}{4}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 6x(k+1) + 9x(k) = k \cdot 2^k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice. K tomu stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení. Protože jde o rovnici s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$. Když dosadíme tento tvar řešení do homogenní rovnice, získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

která má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = 3$. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$x(k) = 3^k C_1 + k \cdot 3^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Zbývá ještě najít partikulární řešení nehomogenní rovnice $w(k)$. Jelikož se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, lze najít partikulární řešení odhadem. Protože 2 není kořenem charakteristické rovnice a polynom u exponenciální funkce 2^k na pravé straně diferenční rovnice je stupně 1, budeme hledat partikulární řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3 \Longrightarrow u_1(k) = 3^k\,,\ u_2(k) = (-3)^k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + (-3)^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Prot...
$\mu = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvar...
b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovni...
členů dostaneme

k

N

(1d)

Řeš
Mái
obec
neho
řešen
pro λ

Tedy o

kde C_1 a
Protože
$\mu = 2$ n
kde a a b
nezávislý

a =

kde C_1 a C

Najděte obe

Řešení:
Máme najít o
obecného řeše

2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty* budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.
Homogenní rovnicí rozumíme rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Věta 2 (rovnice se speciální pravou stranou). Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (1) splňuje

$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$z(n) = n^m \alpha^n \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde R a S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (2).

Algoritmus

1. Najdeme řešení homogenní rovnice (jako minule).
2. Zkontrolujeme pravou stranu a odhadneme řešení. Zkontrolujeme násobnosti kořenů.
3. Dosadíme do rovnice (s PS) a vypočteme neurčité koeficienty.
4. Dáme všechno dohromady.
5. Případně aplikujeme počáteční podmínky, jsou-li jaké.
6. (Uděláme zkoušku.)

Hint

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Pro tato λ je hodnost soustavy rovna jedné, a proto má soustava nenulové řešení.

$$\lambda = 1 \overset{\text{např.}}{\Longrightarrow} v_1 - v_2 = 0 \overset{\text{např.}}{\Longrightarrow} v_1 = 1\,, \quad v_2 = 1 \Longrightarrow \mathbf{u}_1(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \overset{\text{např.}}{\Longrightarrow} v_1 + v_2 = 0 \overset{\text{např.}}{\Longrightarrow} v_1 = 1\,, \quad v_2 = -1 \Longrightarrow \mathbf{u}_2(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení soustavy je tedy

$$\mathbf{x}(k) = C_1\mathbf{u}_1(k) + C_2\mathbf{u}_2 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1(k) = C_1 + (-1)^k C_2 \\ x_2(k) = C_1 + (-1)^{k+1} C_2\,, \end{array}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Abychom našli řešení Cauchyovy úlohy, musíme tyto konstanty určit tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Z těch plyne

$$C_1 + C_2 = 1\,, \quad C_1 - C_2 = 3 \Longrightarrow C_1 = 2\,,\ C_2 = -1\,.$$

Řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x_1(k) = 2 + (-1)^{k+1}\,, \quad x_2(k) = 2 + (-1)^k\,.$$

(1e)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 6x(k+1) - 7x(k) = (-1)^k + 3 \cdot 2^k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) - 6u(k+1) - 7u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme řešení homogenní rovnice hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 7 \Longrightarrow u_1(k) = (-1)^k\,,\ u_2(k) = 7^k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1u_1(k) + C_2u_2(k) = (-1)^k C_1 + 7^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = -1$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1 a $\mu = 2$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = (-1)^k ka + 2^k b$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = \frac{1}{8}\,,\ b = -\frac{1}{5} \Longrightarrow w(k) = \frac{k}{8}(-1)^k - \frac{2^k}{5}\,.$$

Tedy obecné řešení dané diferenční rovnice je

$$x(k) = (-1)^k C_1 + 7^k C_2 + \frac{k}{8}(-1)^k - \frac{2^k}{5}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1i)

Nalezněte partikulární řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = k \cdot 2^{k+2} + (-1)^k .$$

Řešení:
Jedná se o nehomogenní diferenční rovnici druhého řádu. Charakteristická rovnice homogenní rovnice $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Protože $\mu = 2$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1 a $\mu = -1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$w(k) = 2^k k(ak + b) + (-1)^k c ,$$

kde a, b a c jsou konstanty.
Po dosazení do dané rovnice získáme pro tyto konstanty soustavu rovnic

$$4a = 4\,,\ 10a + 2b = 0\,,\ 6c = 1 \Longrightarrow a = 1\,,\ b = -5\,,\ c = \frac{1}{6} \Longrightarrow w(k) = 2^k k(k-5) + \frac{1}{6}(-1)^k .$$

(1f)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 5x(k+1) + 6x(k) = 2k + 1 .$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení homogenní rovnice $u(k+2) - 5u(k+1) + 6u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Abychom našli řešení homogenní rovnice, stačí určit její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, která má řešení $\lambda = 2$ a $\lambda = 3$. Tedy dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $u_1(k) = 2^k$ a $u_2(k) = 3^k$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = C_1 2^k + C_2 3^k ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože pravá strana nehomogenní diferenční rovnice má speciální tvar, můžeme najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme předpokládat, že $w(k) = ak + b$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme

$$2a = 2\,,\ -3a + 2b = 1 \Longrightarrow a = 1\,,\ b = 2 \Longrightarrow w(k) = k + 2 .$$

Tedy obecné řešení dané diferenční rovnice je

$$x(k) = C_1 2^k + C_2 3^k + k + 2 ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(6j)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 1 .$$

Řešení:

Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení homogenní rovnice $u(k+2) - 3u(k+1) + 2u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Abychom našli řešení homogenní rovnice, stačí určit její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, která má řešení $\lambda = 1$ a $\lambda = 2$. Tedy dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $u_1(k) = 1$ a $u_2(k) = 2^k$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

(1j)

$$u(k) = C_1u_1(k) + C_2u_2(k) = C_1 + C_22^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože pravá strana nehomogenní diferenční rovnice má speciální tvar, můžeme najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 1$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, budeme předpokládat, že $w(k) = ak$, kde a je konstanta. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme $a = -1$, a tedy $w(k) = -k$. Proto je obecné řešení dané diferenční rovnice

$$x(k) = C_1 + C_22^k - k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1k)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 3^k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení homogenní rovnice $u(k+2) - 3u(k+1) + 2u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Abychom našli řešení homogenní rovnice, stačí určit její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, která má řešení $\lambda = 1$ a $\lambda = 2$. Tedy dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $u_1(k) = 1$ a $u_2(k) = 2^k$. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(k) = C_1u_1(k) + C_2u_2(k) = C_1 + C_22^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože pravá strana nehomogenní diferenční rovnice má speciální tvar, můžeme najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = a3^k$, kde a je konstanta. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme $a = \dfrac{1}{2}$, a tedy $w(k) = \dfrac{3^k}{2}$. Proto je obecné řešení dané diferenční rovnice

$$x(k) = C_1 + C_22^k + \frac{3^k}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 4x(k) = 3\cdot 5^k + 9\cdot(-1)^k\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení homogenní rovnice $u(k+2) - 4u(k+1) + 4u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Abychom našli řešení homogenní rovnice, stačí určit její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 8x(k) = 3k - 2\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) + 2u(k+1) - 8u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = -4 \Longrightarrow u_1(k) = 2^k\,,\ u_2(k) = (-4)^k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 2^k C_1 + (-4)^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 1$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = ak + b$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -\frac{3}{5}\,,\ b = -\frac{2}{25} \Longrightarrow w(k) = -\frac{15k+2}{25}\,.$$

Tedy obecné řešení dané diferenční rovnice je

$$x(k) = 2^k C_1 + (-4)^k C_2 - \frac{15k+2}{25}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

---

(19)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) + 6x(k+1) + 9x(k) = (-3)^{k+2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice $u(k+2) + 6u(k+1) + 9u(k) = 0$. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $u(k) = \lambda^k$. Po dosazení do homogenní rovnice získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0\,.$$

Tato rovnice má jeden kořen $\lambda = -3$, který je násobnosti 2. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(k) = C_1(-3)^k + C_2 k(-3)^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, budeme partikulární řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice hledat odhadem. Neboť -3 je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 2, hledáme toto řešení ve tvaru $w(k) = ak^2(-3)^k$. Po dosazení do nehomogenní diferenční rovnice dostaneme

$$9a(k^2 + 4k + 4) - 18a(k^2 + 2k + 1) + 9ak^2 = 9 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}\,.$$

Našli jsme tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice $w(k) = \frac{k^2}{2}(-3)^k$. Tedy obecné řešení dané nehomogenní rovnice je

(1g)

$$x(k) = (C_1 + C_2 k) \cdot (-3)^k + \frac{k^2}{2}(-3)^k ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1e)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$4x(k+2) - 4x(k+1) + x(k) = k .$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice $4u(k+2) - 4u(k+1) + u(k) = 0$. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení homogenní rovnice ve tvaru $u(k) = \lambda^k$. Po dosazení získáme charakteristickou rovnici

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 = 0 .$$

Tato rovnice má jeden kořen $\lambda = \frac{1}{2}$, který je násobnosti 2. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(k) = C_1 2^{-k} + C_2 k 2^{-k} ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, budeme partikulární řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice hledat odhadem. Neboť 1 není kořenem charakteristické rovnice, hledáme toto řešení ve tvaru $w(k) = ak + b$. Po dosazení do nehomogenní diferenční rovnice dostaneme

$$a = 1 , \quad 4a + b = 0 \Longrightarrow a = 1 , \quad b = -4 \Longrightarrow w(k) = k - 4 .$$

Tedy obecné řešení dané nehomogenní rovnice je

$$x(k) = (C_1 + C_2 k) \cdot 2^{-k} + k - 4 ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$2x(k+2) - 5x(k+1) + 2x(k) = 2^k - (-2)^k .$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $2u(k+2) - 5u(k+1) + 2u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2 , \ \lambda_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow u_1(k) = 2^k , \ u_2(k) = 2^{-k} .$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 2^k C_1 + 2^{-k} C_2 ,$$

Protože pravá strana nehomogenní rovnice má speciální tvar, lze najít její řešení $w(k)$ odhadem. Protože $\mu = 1$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, budeme hledat $w(k)$ ve tvaru $w(k) = k^2(ak+b)$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme

$$6a = 2\,,\ 6a + 2b = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}\,,\ b = -1 \Longrightarrow w(k) = \frac{k^2(k-3)}{3}\,.$$

Tedy obecné řešení dané nehomogenní rovnice je

$$x(k) = C_1 + C_2 k + \frac{k^2(k-3)}{3}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

(1b)

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) + 4x(k) = 2^{k+3}\cos\frac{k\pi}{2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) + 4u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_\pm = \pm 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\pm\pi/2} \Longrightarrow U_\pm(k) = 2^k \mathrm{e}^{\pm k\pi\mathrm{i}/2}\,.$$

Našli jsme tedy dvě lineárně nezávislá komplexní řešení dané homogenní rovnice. Protože daná soustava má reálné koeficienty, lze vybrat za systém dvou lineárně nezávislých řešení funkce

$$u_1(k) = \operatorname{Re} U_+(k) = 2^k\cos\frac{k\pi}{2}\,, \quad u_2(k) = \operatorname{Im} U_+(k) = 2^k\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = C_1 2^k \cos\frac{k\pi}{2} + C_2 2^k \sin\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = ak2^k\left(a\cos\frac{k\pi}{2} + b\sin\frac{k\pi}{2}\right)$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$a = -1\,,\ b = 0 \Longrightarrow w(k) = -2^{k+1}\cos\frac{k\pi}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x(k) = C_1 2^k\cos\frac{k\pi}{2} + C_2 2^k \sin\frac{k\pi}{2} - 2^{k+1}k\cos\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 3x(k) = (k+1)\cdot 2^k\,.$$

řešení ve tvaru $w(k) = (ak+b)\cdot 2^k$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do dané rovnice a srovnání koeficientů u stejných mocnin k získáme pro konstanty a a b vztahy

$$a = 1\,,\quad -4a + b = 0 \Longrightarrow a = 1\,,\quad b = 4 \Longrightarrow w(k) = (k+4)2^k\,.$$

Obecné řešení dané diferenční rovnice je tedy

$$x(k) = \bigl(C_1 + kC_2\bigr)\cdot 3^k + \bigl(k+4\bigr)\cdot 2^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

(1m)

$$x(k+2) - 6x(k+1) + 9x(k) = \cos\frac{k\pi}{2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu. To je součtem obecného řešení $u(k)$ příslušné homogenní rovnice $u(k+2) - 6u(k+1) + 9u(k) = 0$ a jednoho řešení $w(k)$ nehomogenní rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $u(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow u_1(k) = 3^k\,,\ u_2(k) = 3^k k\,.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + 3^k k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Protože má pravá strana diferenční rovnice speciální tvar, lze najít její řešení odhadem. Protože $\mu =$ i není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat řešení ve tvaru $w(k) = a\cos\frac{k\pi}{2} + b\sin\frac{k\pi}{2}$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do nehomogenní rovnice a srovnání koeficientů u lineárně nezávislých členů dostaneme

$$8a - 6b = 1\,,\ 6a + 8b = 0 \Longrightarrow a = \frac{2}{25}\,,\ b = -\frac{3}{50} \Longrightarrow w(k) = \frac{2}{25}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{3}{50}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Tedy obecné řešení dané diferenční rovnice je

$$x(k) = 3^k C_1 + 3^k k C_2 + \frac{2}{25}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{3}{50}\sin\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$x(k+2) + 2x(k+1) + 2x(k) = \cos\frac{k\pi}{2}\,.$$

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní diferenční rovnice druhého řádu. Nejprve nalezneme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $u(k+2) + 2u(k+1) + 2u(k) = 0$. K tomu stačí najít její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantní mi koeficienty, budeme

(2a) $y(n+2) - 10y(n+1) + 24y(n) = 2^n \qquad y(1)=1 \quad y(2)=1$

$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$

$y_H(n) = c_1 6^n + c_2 4^n$

$(\lambda-6)(\lambda-4)=0$

$\lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = 4$

$d_n = 2^n = 2^n(\cos 0n + \sin 0n)$

$2+0i$ není kořen

$y_p(n) = A\,2^n$

$A\,2^{n+2} - 10\,2^{n+1}A + 24A\,2^n = 2^n$

$A(4 - 20 + 24)2^n = 2^n \qquad 8A = 1 \qquad A = 1/8$

$y(n) = c_1 6^n + c_2 4^n + \frac{1}{8}2^n$

Podm. $y(1): 6c_1 + 4c_2 + \frac{1}{4} = 1 \qquad c_2 = 1/2$

$y(2): 36c_1 + 16c_2 + \frac{1}{2} = 1 \qquad c_1 = -5/24$

$y = -\frac{5}{24}6^n + \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{8}2^n \qquad n \in \mathbb{N}_0$

Zk. $-\frac{5 \cdot 36}{24} \cdot 6^n + 8 \cdot 4^n + \frac{1}{2}2^n - 10\left(-\frac{30}{24}6^n + 2 \cdot 4^n + \frac{1}{4}2^n\right) + 24\left(-\frac{5}{24}6^n + \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{8}2^n\right)$

$= 6^n\left(-\frac{15}{2} + \frac{25}{2} - 5\right) + 4^n(8 - 20 + 12) + 2^n\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{4} + \frac{24}{8}\right) = 2^n$ ✓

(2b) $y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = n + 2^n \qquad y(1)=0 \quad y(2)=0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$y_H(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n$

$(\lambda-3)^2 = 0 \quad \lambda = 3$

y_p: ve tvaru $y_p = (An+B) + C \cdot 2^n$

$A(n+2) + B + C\,2^{n+2} - 6(A(n+1)+B + 2C2^n) + 9(An+B+C2^n) = n + 2^n$

$2A + \underline{An} + B + \underline{4C2^n} - 6A - \underline{6An} - 6B - \underline{12C2^n} + \underline{9An} + 9B + \underline{9C2^n} = n + 2^n$

2^n: $4C - 12C + 9C = 1 \qquad C = 1$

n: $A - 6A + 9A = 1 \qquad 4A = 1 \quad A = 1/4$

1: $2A + B - 6A - 6B + 9B = 0 \qquad -4A + 4B = 0$

$B = A \quad B = 1/4$

$$y_p = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} + 2^n$$

$$y = c_1 3^n + c_2 n 3^n + \frac{n}{4} + \frac{1}{4} + 2^n$$

$y(1)$: $\quad 3c_1 + 3c_2 + 2 + \frac{1}{2} = 0 \qquad c_1 = -\frac{41}{36} \quad c_2 = \frac{11}{36}$

$y(2)$: $\quad 9c_1 + 18c_2 + \frac{3}{4} + 4 = 0$

$$\underline{\underline{y = -\frac{41}{36}3^n + \frac{11}{36}n3^n + \frac{1}{4}(n+1) + 2^n}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

(2c) $y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = n2^n \qquad y(1) = 1 \quad y(2) = 0 \quad y(3) = 1$

z minula $\quad y_H = c_1 1^n + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n$

y_p ve tvaru $\quad y_p = (An+B)2^n \quad$ (kořeny OR, 2 není kořen)

$$8\cdot 2^n(nA + 3A + B) + 2^n\cdot 4(An + 2A + B) - 2\cdot 2^n(An + A + B)$$
$$- (An+B)2^n = n2^n$$

$$2^n(\underline{8nA} + 24A + 8B + \underline{4An} + 8A + 4B - \underline{2An} - 2A - 2B - \underline{An} - B) = n2^n$$

n: $\quad 8A + 4A - 2A - A = 1 \qquad 9A = 1 \quad A = 1/9$

1: $\quad 24A + 8B + 8A + 4B - 2A - 2B - B = 0 \qquad 30A + 9B = 0 \quad B = -\frac{30}{81} = -\frac{10}{9}$

$$y = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n + 2^n\left(\frac{1}{9}n - \frac{10}{9}\right)$$

$y(1)$: $\quad 1 = c_1 - c_2 - c_3 + \frac{2}{9} - \frac{20}{9}$

$y(2)$: $\quad 0 = c_1 + c_2 + 2c_3 + \frac{8}{9} - \frac{40}{9} \qquad c_1 = \frac{41}{9} \quad c_2 = \frac{11}{3} \quad c_3 = -\frac{19}{9}$

$y(3)$: $\quad 1 = c_1 - c_2 - 3c_3 + \frac{24}{9} - \frac{80}{9}$

$$\underline{\underline{y = \frac{41}{9} + \frac{11}{3}(-1)^n - \frac{19}{9}n(-1)^n + 2^n\left(\frac{n}{9} - \frac{10}{9}\right)}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

(2d) $y(n+3)+3y(n+2)+3y(n+1)+y(n)=n^2 \quad y(1)=0 \quad y(2)=0 \quad y(3)=0$

z minula $\quad y_H(n)=c_1(-1)^n+c_2 n(-1)^n+c_3 n^2(-1)^n$

$1+0i$ není kořen

$y_p = An^2+Bn+C, \quad$ pak

$A(n+3)^2+B(n+3)+C+3(A(n+2)^2+B(n+2)+C)+3(A(n+1)^2+B(n+1)$
$+C)+An^2+Bn+C=n^2$

$An^2+A6n+9A+Bn+3B+C+3An^2+6nA+3A+3Bn+3B+3C$

$+3An^2+12An+12A+3Bn+6B+3C+An^2+Bn+C=n^2$

$n^2: \quad A+3A+3A+A=1 \qquad 8A=1 \qquad A=1/8$

$n: \quad 6A+6A+12A+B+3B+3B+B=0 \qquad 24A+8B=0 \qquad B=-\frac{3}{8}$

$1: \quad 9A+3B+C+3A+3B+3C+6B+3C+C+12A=0$

$24A+12B+8C=0 \qquad 3-\frac{36}{8}+8C=0$

$C=\frac{3}{16}$

$y=c_1(-1)^n+c_2 n(-1)^n+c_3 n^2(-1)^n+\frac{1}{8}n^2-\frac{3}{8}n+\frac{3}{16}$

$y(1): \quad 0=-c_1-c_2-c_3+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}$

$y(2): \quad 0=c_1+2c_2+4c_3+\frac{1}{2}-\frac{6}{8}+\frac{3}{16}$

$y(3) \quad 0=-c_1-3c_2-9c_3+\frac{9}{8}-\frac{9}{8}+\frac{3}{16}$

$c_3=0$

$c_2=1/8$

$c_1=-3/16$

$y=-\frac{3}{16}(-1)^n+\frac{1}{8}n(-1)^n+\frac{n^2}{8}-\frac{3n}{8}+\frac{3}{16} \qquad n\in\mathbb{N}$

(2e) $y(n+3) - 27y(n) = 26n^2$

z minula $y(n) = c_1 3^n + c_2 3^n \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + c_3 3^n \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$

kořeny to nejsou, tedy $y_p = An^2 + Bn + C$

$A(n+3)^2 + B(n+3) + C - 27(An^2 + Bn + C) = 26n^2$

$\underline{An^2} + \underline{A6n} + 9A + Bn + 3B + C - \underline{27An^2} - 27Bn - 27C = 26n^2$

n^2: $A - 27A = 26$ $\quad A = -1$

n: $6A + B - 27B = 0$ $\quad -26B = 6$ $\quad B = -\frac{3}{13}$

1: $9A + 3B + C - 27C = 0$ $\quad -26C = 9 + \frac{9}{13}$ $\quad C = -\frac{63}{169}$

$y = c_1 3^n + c_2 3^n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_3 3^n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - n^2 - \frac{3}{13}n - \frac{63}{169}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

(2f) $y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = n(-1)^n$

z minula $y_h = c_1 + c_2 3^n \cos\frac{\pi n}{2} + c_3 3^n \sin\frac{n\pi}{2}$

(-1) není kořen, $y_p = (An + B)(-1)^n$

$-(\underline{An} + 3A + B)(-1)^n - (\underline{An} + 2A + B)(-1)^n - 9(\underline{An} + A + B)(-1)^n$
$- 9(\underline{An} + B)(-1)^n = n(-1)^n$

n: $-A - A - 9A - 9A = 1$ $\quad A = -1/20$

1: $-3A - B - 2A - B - 9A - 9B - 9B = 0$
$-14A - 20B = 0$ $\quad 20B = \frac{14}{20}$ $\quad B = \frac{7}{200}$

$y = c_1 + 3^n\left(c_2 \cos\frac{\pi n}{2} + c_3 \sin\frac{\pi n}{2}\right) + (-1)^n\left(-\frac{1}{20}n + \frac{7}{200}\right)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

The general solution is then

$$x(n) = Ca^n + \frac{b}{1-a}.$$

Example: Solve

$$2x(n) - x(n-1) = 2^n, \quad x(0) = 3$$

The solution of the homogenous equation $2x(n) - x(n-1)$ is $x(n) = C(1/2)^n$. To find a particular solution of the inhomogeneous problem we try an exponential function $x(n) = D2^n$ with a constant D to be determined. Plugging into the equation we find

$$2D2^n - D2^{n-1} = 2^n$$

or after dividing by 2^{n-1}

$$4D - D = 2 \text{ or } D = \frac{2}{3}.$$

So the general solution is

$$x(n) = C\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

and the initial condition gives $x(0) = 3 = C + \frac{2}{3}$ and so

$$x(n) = \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

More interest rate: A bank account gives an interest rate of 5% compounded monthly. If you invest invest initially \$1000, and add \$10 every month. How much money do you have after 5 years? Since the interest is paid monthly we set

$$x(n) = \text{ amount of money after } n \text{ months}$$

and we have the equation for $x(n)$

$$x(n) = \left(1 + \frac{.05}{12}\right)x(n-1) + 10 = \left(\frac{241}{240}\right)x(n-1) + 10$$

For the particular solution we try $x(n) = D$ and find

$$D = \frac{241}{240}D + 10$$

i.e., $D = -2400$. The general solution is then

$$x(n) = D\left(\frac{241}{240}\right)^n - 2400$$

and $x(0) = 1000$ gives

$$x(n) = 3400\left(\frac{241}{240}\right)^n - 2400$$

and so $x(60) = 1963.41$

Second order homogeneous equation: We consider an equation where $x(n)$ depends on both $x(n-1)$ and $x(n-2)$:

$$\boxed{\text{Second order homogeneous} \quad x(n) = ax(n-1) + bx(n-2).}$$

It is easy to see that we are given both $x(0)$ and $x(\mathbf{1})$ we can then determine $x(2)$, $x(3)$, and so on.

Linearity Principle: *One verifies verify that if $x(n)$ and $y(n)$ are two solutions of the second order homogeneous equation, then $C_1x(n)+C_2y(n)$ is also a solution for any choice of constants C_1, C_2.*

To find the general solution we get inspired by the homogeneous first order equation and look for solutions of the form

$$x(n) = \alpha^n$$

If we plug this into the equation we find

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2}$$

and dividing by α^{n-2} give

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0$$

We find (in general) two distinct roots α_1 and α_2 and the general solution has then the form

$$\boxed{\text{General solution} \quad x(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n}$$

■

Example: The **Fibonacci sequence** is given by

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2), \quad x(0) = 0, x(1) = 1$$