# 2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

## Teorie

**Definice 1.** Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty* budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

*Homogenní rovnicí* rozumíme rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

**Věta 2** (rovnice se speciální pravou stranou)**.** Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (1) splňuje

$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ a $P, Q$ jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$z(n) = n^m \alpha^n \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $R$ a $S$ jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (2).

## Algoritmus

1. Najdeme řešení homogenní rovnice (jako minule).
2. Zkontrolujeme pravou stranu a odhadneme řešení. Zkontrolujeme násobnosti kořenů.
3. Dosadíme do rovnice (s PS) a vypočteme neurčité koeficienty.
4. Dáme všechno dohromady.
5. Případně aplikujeme počáteční podmínky, jsou-li jaké.
6. (Uděláme zkoušku.)

## Hint

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

## Příklady

1. Najděte řešení diferenčních rovnic:

   (a) $y(n+2) + 2y(n+1) - 8y(n) = 4^n$

   (b) $3y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = 2 - n$

   (c) $3y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = \cos\frac{n\pi}{2}$

   (d) $y(n+2) - 9y(n) = n2^n$

   (e) $y(n+2) - 6y(n+1) - 7y(n) = (-1)^n + 3 \cdot 2^n$

   (f) $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 2n + 1$

   (g) $y(n+2) + 6y(n+1) + 9y(n) = (-3)^{2+n}$

   (h) $y(n+2) + 4y(n) = 2^{n+3}\cos\frac{n\pi}{2}$

   (i) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n2^{n+2} + (-1)^n$

   (j) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 1$

   (k) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 3^n$

   (l) $4y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = n$

   (m) $y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = \cos\frac{n\pi}{2}$

2. Příklady ze starších písemek.

   (a) $y(n+2) - 10y(n+1) + 24y(n) = 2^n$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$

   (b) $y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = n + 2^n$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$

   (c) $y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = n2^n$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$, $y(3) = 1$.

   (d) $y(n+3) + 3y(n+2) + 3y(n+1) + y(n) = n^2$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$, $y(3) = 0$.

   (e) $y(n+3) - 27y(n) = 26n^2$

   (f) $y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = n(-1)^n$

3. Máte bankovní účet s měsíčním 5% úrokem (složené úročení 5/12% každý měsíc). Na počátku jste vložili 1000 korun a pak jste vkládali 10 Kč každý měsíc. Kolik bude na účtu peněz za 5 let?