Diferenční rovnice

(1d) Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) = 4x(k)\,, \quad x(0) = 3\,,\ x(1) = 2\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 = 4 \Longrightarrow \lambda = \pm 2 \Longrightarrow x_1(k) = 2^k\,,\ x_2(k) = (-2)^k \Longrightarrow x(k) = C_1 2^k + C_2(-2)^k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 + C_2 = 3\,,\ 2C_1 - 2C_2 = 2 \Longrightarrow C_1 = 2\,,\ C_2 = 1 \Longrightarrow x(k) = 2^{k+1} + (-2)^k\,.$$

(1a) Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) = 8x(k+1) - 15x(k)\,, \quad x(0) = x(1) = -1\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve najdeme její obecné řešení. Protože jde o rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, Po dosazení do dané diferenční rovnice získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \text{ nebo } \lambda = 5\,.$$

Máme tedy dvě lineárně nezávislá řešení $u_1(k) = 3^k$ a $u_2(k) = 5^k$. Proto je obecné řešení dané diferenční rovnice

$$x(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = 3^k C_1 + 5^k C_2\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Abychom našli řešení Cauchyho úlohy, je ještě třeba určit konstanty tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne pro C_1 aC_2 soustava rovnic

$$C_1 + C_2 = -1\,,\ \ 3C_1 + 5C_2 = -1 \Longrightarrow C_1 = -2\,,\ \ C_2 = 1\,.$$

Tedy řešení dané Cauchyho úlohy je

$$x(k) = -2 \cdot 3^k + 5^k\,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) + x(k+1) - 2x(k) = 0\,, \quad x(0) = 0\,,\ x(1) = 3\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(1e) **Příklad 9.** *Najděte obecné řešení diferenční rovnice* $y(x+2) - 16y(x) = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - 16 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$(\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -4.$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \text{charakteristické kořeny jsou různé.}$$

Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1 4^x + c_2(-4)^x.$$

(1b) **Příklad 10.** *Určete obecné řešení rovnice* $y(x+2) + 4y(x+1) + 4y(x) = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \text{charakteristické kořeny jsou násobné.}$$

Obecné řešení je tedy

$$y(x) = c_1(-2)^x + c_2 x(-2)^x.$$

(1e) **Příklad 11.** *Určete obecné řešení rovnice* $y(x+2) + 16y(x) = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 16 = 0.$$

Určíme charakteristické kořeny

$$\lambda^2 = -16$$

$$\lambda_1 = 4i, \quad \lambda_2 = -4i.$$

Imaginární číslo $2i$ má $r = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Obecné řešení je tedy

$$y(x) = 2^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} x + c_2 \sin \frac{\pi}{2} x\right).$$

(1h)

Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. Protože je to rovnice s konstantní mi koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$. Po dosazení do dané rovnice získáme charakteristickou rovnici

$$4\lambda^2 + 25 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{5}{2}\,\mathrm{i} = \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}/2}\,.$$

Tedy fundamentální systém řešení je

$$u_1(k) = \left(\frac{5}{2}\right)^k \cos\frac{k\pi}{2}\,, \quad u_2(k) = \left(\frac{5}{2}\right)^k \sin\frac{k\pi}{2}$$

a obecné řešení dané rovnice

$$x(k) = C_1 u_1(k) + C_2 u_2(k) = \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(C_1 \cos\frac{k\pi}{2} + C_2 \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Z nich dostaneme $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Řešení dané Cauchyovy úlohy je tedy

$$x(k) = \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(\cos\frac{k\pi}{2} + 2\sin\frac{k\pi}{2}\right).$$

(1i)

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) = 4x(k+1) - 8x(k)\,, \quad x(0) = 1\,,\ x(1) = 0\,.$$

Řešení:

Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do dané rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \pm 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}\,.$$

Našli jsme tedy komplexní řešení $U(k) = 8^{k/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/4} = 8^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{4}\right)$. Protože rovnice má reálné koeficienty, lze za dvě reálná řešení volit funkce

$$x_1(k) = \operatorname{Re} U(k) = 8^{k/2}\cos\frac{k\pi}{4}\,, \quad x_2(k) = \operatorname{Im} U(k) = 8^{k/2}\sin\frac{k\pi}{4}\,.$$

Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$x(k) = C_1 8^{k/2}\cos\frac{k\pi}{4} + C_2 8^{k/2}\sin\frac{k\pi}{4}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Abychom našli řešení Cauchyovy úlohy, musíme tyto konstanty zvolit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 = 1\,,\ 2C_1 + 2C_2 = 0 \Longrightarrow C_1 = 1\,,\ C_2 = -1 \Longrightarrow x(k) = 8^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4}\right).$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1e)

$$x(k+2) - 6x(k+1) + 9x(k) = 0\,, \quad x(0) = 0\,,\ x(1) = 3\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow x_1(k) = 3^k\,.$$

Protože je $\lambda = 3$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, je její druhé řešení rovno například $x_2(k) = k3^k$. Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = 3^k(C_1 + kC_2)\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 = 0\,,\ C_1 + C_2 = 1 \Longrightarrow C_1 = 0\,,\ C_2 = 1 \Longrightarrow x(k) = k3^k\,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 4x(k) = 0\,, \quad x(0) = 1\,,\ x(1) = 2\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. Protože je to rovnice s konstantní mi koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$. Po dosazení do dané rovnice získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\,,$$

která má jediný kořen $\lambda = 2$ násobnosti 2. Proto lze zvolit fundamentální systém řešení $u_1(k) = 2^k$ a $u_2(k) = 2^k k$ a obecné řešení rovnice je

$$x(k) = C_1 2^k + C_2 2^k k\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Abychom našli řešení Cauchyho úlohy, musíme ještě určit hodnotu konstant C_1 a C_2. Z počátečních podmínek plyne

$$C_1 = 1\,,\ \ 2C_1 + 2C_2 = 2 \Longrightarrow C_1 = 1\,,\ \ C_2 = 0\,.$$

Tedy hledané řešení Cauchyho úlohy je $x(k) = 2^k$.

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1f)

$$4x(k+2) + 25x(k) = 0\,, \quad x(0) = 1\,,\ x(1) = 5\,.$$

Řešení:

Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = C_1 2^k + C_2 3^k \,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 + C_2 = 1 \,,\ 2C_1 + 3C_2 = 3 \Longrightarrow C_1 = 0 \,,\ C_2 = 1 \Longrightarrow x(k) = 3^k \,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1g)

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \,, \quad x(0) = 1 \,,\ x(1) = 2 \,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \,,\ \lambda_2 = 2 \Longrightarrow x_1(k) = 1 \,,\ x_2(k) = 2^k \,.$$

Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = C_1 + C_2 2^k \,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 + C_2 = 1 \,,\ 2C_1 + 3C_2 = 2 \Longrightarrow C_1 = 0 \,,\ C_2 = 1 \Longrightarrow x(k) = 2^k \,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1h)

$$9x(k+2) + 6x(k+1) + x(k) = 0 \,, \quad x(0) = 1 \,,\ x(1) = 1 \,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow x_1(k) = (-3)^{-k} \,.$$

Protože je $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, je její druhé řešení rovno například $x_2(k) = k(-3)^{-k}$. Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = (-3)^{-k}\big(C_1 + kC_2\big) \,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 = 1 \,,\ C_1 + C_2 = -3 \Longrightarrow C_1 = 1 \,,\ C_2 = -4 \Longrightarrow x(k) = (-3)^{-k}\big(1 - 4k\big) \,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$16x(k+2) + 24x(k+1) + 9x(k) = 0\,, \quad x(0) = 0\,,\ x(1) = 3\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$16\lambda^2 + 24\lambda + 9 = (4\lambda + 3)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \Longrightarrow x_1(k) = \left(-\frac{3}{4}\right)^k .$$

Protože je $\lambda = -\frac{3}{4}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, je její druhé řešení rovno například $x_2(k) = k\left(-\frac{3}{4}\right)^k$. Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = \left(-\frac{3}{4}\right)^k (C_1 + kC_2)\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 = 0\,,\ C_1 + C_2 = -4 \Longrightarrow C_1 = 0\,,\ C_2 = -4 \Longrightarrow x(k) = 3k\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} .$$

(1j)

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x(k+2) + 8x(k+1) + 16x(k) = 0\,, \quad x(0) = 4\,,\ x(1) = 0\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. K tomu stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficient, lze hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do diferenční rovnice získáme pro konstantu λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow x_1(k) = (-4)^k .$$

Protože je $\lambda = -4$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, je její druhé řešení rovno například $x_2(k) = k(-4)^k$. Tedy obecné řešení dané soustavy je

$$x(k) = (-4)^k (C_1 + kC_2)\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne

$$C_1 = 4\,,\ C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_1 = 4\,,\ C_2 = -4 \Longrightarrow x(k) = (-4)^{k+1}(k-1)\,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1m)

$$x(k+2) + x(k) = 0\,, \quad x(0) = 3\,,\ x(1) = 4\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyovy úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. Protože se jedná o diferenční rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(k) = \lambda^k$, kde λ je konstanta. Po dosazení do dané rovnice dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}\,.$$

Našli jsme tedy komplexní řešení $U(k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2} = \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}$. Protože rovnice má reálné koeficienty, lze za dvě reálná řešení volit funkce

$$x_1(k) = \operatorname{Re} U(k) = \cos\frac{k\pi}{2}\,, \quad x_2(k) = \operatorname{Im} U(k) = \sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$x(k) = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
Abychom našli řešení Cauchyovy úlohy, musíme tyto konstanty zvolit tak, aby řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Z těch plyne $C_1 = 3$ a $C_2 = 4$. Hledané řešení Cauchyovy úlohy tedy je

$$x(k) = 3\cos\frac{k\pi}{2} + 4\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

(1k)

$$x(k+2) + 4x(k) = 0\,, \quad x(0) = 1\,,\ x(1) = -4\,.$$

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu. Nejprve nalezneme její obecné řešení. Protože je to rovnice s konstantní mi koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(k) = \lambda^k$. Po dosazení do dané rovnice získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}/2} \Longrightarrow u_1(k) = 2^k\cos\frac{k\pi}{2}\,, \quad u_2(k) = 2^k\sin\frac{k\pi}{2}\,,$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$x(k) = 2^k C_1\cos\frac{k\pi}{2} + 2^k C_2\sin\frac{k\pi}{2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Abychom našli řešení Cauchyho úlohy, musíme ještě určit hodnotu konstant C_1 a C_2. Z počátečních podmínek plyne $C_1 = 1$ a $C_2 = -2$. Tedy řešení dané Cauchyho úlohy je

$$x(k) = 2^k\cos\frac{k\pi}{2} - 2^{k+1}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Zde je důležité, že řešení $\psi_1(n), \psi_2(n), \dots, \psi_{m_i}(n)$ rovnice

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$$

jsou zároveň řešeními rovnice (29').

Lemma 1. *Množina*

$$G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \dots, n^{m_i - 1}\lambda_i^n\}$$

je fundamentální množinou řešení rovnice $(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$.

Důsledek 2. *Množina*

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$$

je fundamentální množinou řešení (29').

Důsledek 3. *Obecné řešení (29') je dáno vztahem*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \dots + a_{im_i - 1}n^{m_i - 1}\right).$$

(1n) **Příklad 11.** Řešte rovnici

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1.$$

Řešení Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Charakteristické kořeny:

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2, \lambda_3 = 3,$$

tedy násobné.

Obecné řešení:

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n.$$

Po dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$a_0 = 3, a_1 = 2, b_1 = -3,$$

a tedy řešením počáteční úlohy je

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}.$$

(2a) $y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$

$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$(\lambda+1)^2(\lambda-1) = 0$

2 nás. $\lambda_1 = -1$ 1 nás. $\lambda_1 = 1$

$y(n) = c_1 1^n + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n$

$= c_1 + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n$

$c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$

(2b) $y(n+3) + 2y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ $y(n) = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + c_3$

$(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = 1$

2c) $y(n+3) + 3y(n+2) + 3y(n+1) + y(n) = 0$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ $y(n) = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n$

$(\lambda+1)^3 = 0$ $\lambda_1 = -1$ 3-nás

(2d) $y(n+3) - 27y(n) = 0$

$\lambda^3 - 27 = 0$ $(\lambda-3)(\lambda^2 + 3\lambda + 9) = 0$

$\lambda_1 = 3$ $\lambda_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$

$\lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$\lambda_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$ $y(n) = c_1 3^n + c_2 3^n \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + c_3 3^n \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$

$-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i = \frac{6}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 3\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$

(2e) $y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0+3i$ $\lambda_3 = 0-3i$

$(\lambda-1)(\lambda^2+9) = 0$ $\downarrow$ $3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

$(\lambda-1)(\lambda+3i)(\lambda-3i) = 0$

$y(n) = c_1 + c_2 3^n \cos \frac{\pi}{2} n + c_3 3^n \sin \frac{\pi}{2} n$

(2f) $y(n+3) + 5\,y(n+2) - 6\,y(n) = 0$

$\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6 = 0$ $\qquad$ $y(n) = c_1 + c_2(-3+\sqrt{3})^n + c_3(-3-\sqrt{3})^n$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 6) = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -3+\sqrt{3} \qquad \lambda_3 = -3-\sqrt{3}$

b) The equation is linearly non-homogeneous of the second order. As in the previous example, firstly we are looking for the general solution of the homogeneous equation.

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

The characteristic equation $z^2 - 3z + 2 = 0$ has simple roots $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Therefore the general solution of the homogeneous equation is $\overline{v}_n = C_1 + C_2 2^n$. Now we are looking for at least one particular solution of the non-homogeneous equation. As its right hand side is -1, i.e. a constant, first of all we try a particular solution in the form $v^* = d$. By substitution we obtain $0 = 0$. Next we undertake the procedure in the form $v^* = d.n$. This time we get the equation $d(n+2) - 3d(n+1) + 2dn = -1$. After equating in front of the same monomials we find $d = 1$, i.e. we have a particular solution $v^* = n$. In accordance with properties 3^0 and 4^0, the general solution of the non-homogeneous equation is represented in the form: $u_n = \overline{v}_n + v^*$, i.e.

$$u_n = C_1 + C_2 2^n + n.$$

By substitution under the assigned initial conditions we obtain the following system for C_1, C_2:

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{array} \right. .$$

Its solutions are $C_1 = 1,\ C_2 = 0$. Therefore the solution of the problem is $u_n = 1 + n$.

(2g) c) The equation is linearly homogeneous of the third order. Its characteristic equation is

$$z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6} = 0.$$

By using Horner's method, by expansion, through the Mathematica system or in another way we find its roots $z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{2},\ z_3 = \frac{1}{3}$, which are simple. Therefore the general solution of the given equation has the form:

$$\overline{v}_n = C_1 + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

By substitution of the assigned initial conditions for $n = 0, 1, 2$ we get the following system for determining the constants C_1, C_2, C_3:

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{3} C_3 = 1 \\ C_1 + \frac{1}{4} C_2 + \frac{1}{9} C_3 = 2 \end{array} \right. .$$

Its solution is: $C_1 = \frac{7}{2},\ C_2 = -8, C_3 = \frac{9}{2}$.

Answer: $u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{2}$.

Note. We submit the corresponding calculations by means of the system *Mathematica*:

```
(* Example 4c - difference equations*)
z =.
Solve[z^3 - 11/6 z^2 + z - 1/6 == 0, z]
{{z -> 1/3}, {z -> 1/2}, {z -> 1}}

Clear[c1, c2, c3]
Solve[{c1 + c2 + c3 == 0, c1 + 1/2 c2 + 1/3 c3 == 1, c1 + 1/4 c2 + 1/9 c3 == 2
 }, {c1, c2, c3}]

{{c1 -> 7/2, c2 -> -8, c3 -> 9/2}}
```

(2a) d) The equation is homogeneous. Its characteristic equation is the biquadratic equation $6z^4 - 5z^2 + 1 = 0$, which has four simple roots $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ z_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Then the general solution of the difference equation has the form:

$$u_n = C_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + C_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + C_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + C_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

Hence for $n = 0,1,2,3$ and from the given initial conditions we obtain the system with respect of the constants C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left|\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}C_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}C_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{3}C_3 + \frac{1}{3}C_4 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}C_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}C_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}C_3 - \frac{1}{3\sqrt{3}}C_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. .$$

Its solutions are: $C_1 = 2,\ C_2 = 1,\ C_3 = -\frac{3}{2},\ C_4 = -\frac{3}{2}$.

Answer: $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Note. We submit the corresponding calculations for solving the system by means of *Mathematica*:

```
(* Example 4d - difference equations*)
Solve[{c1 + c2 + c3 + c4 == 0,
  1/Sqrt[2] c1 - 1/Sqrt[2] c2 + 1/Sqrt[3] c3 - 1/Sqrt[3] c4 == 1/Sqrt[2],
  1/2 c1 + 1/2 c2 + 1/3 c3 + 1/3 c4 == 1/2,
  1/(2 Sqrt[2]) c1 - 1/(2 Sqrt[2]) c2 + 1/(3 Sqrt[3]) c3 - 1/(3 Sqrt[3]) c4 == 1/(2 Sqrt[2])}, {c1, c2, c3, c4}]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}c1-\frac{1}{\sqrt{2}}c2+\frac{1}{\sqrt{3}}c3-\frac{1}{\sqrt{3}}c4==\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{2}c1+\frac{1}{2}c2+\frac{1}{3}c3+\frac{1}{3}c4==\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}c1-\frac{1}{2\sqrt{2}}c2+\frac{1}{3\sqrt{3}}c3-\frac{1}{3\sqrt{3}}c4==\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\left\{\left\{c1\to 2,\ c2\to 1,\ c3\to -\frac{3}{2},\ c4\to -\frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Author: Snezhana Gocheva-Ilieva
Plovdiv University
snow@uni-plovdiv.bg

kde $A \neq 0$ a $x = x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí metody variace konstant dostaneme pro funkci $C(x)$ rovnici

$$\Delta C(x) = \frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}.$$

Sumací vypočteme funkci $C(x) = \Delta^{-1}(\frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}) + k$, kde k je konstanta.
Obecné řešení je tedy

$$y(x) = A^{x-x_0}\left[\Delta^{-1}\left(\frac{B(x)}{A^{x-x_0+1}}\right) + k\right].$$

(3) **Příklad 5.** *Pastevec má stádo 20 ovcí, které se každý rok zvětšuje o 8%. Určete, kolik ovcí bude mít pastevec za 10 let.*

Řešení: Sestavíme diferenční rovnici

$$y(x+1) - y(x) = 0,08y(x)$$

a stanovíme si počáteční podmínky

$$y(0) = 20 = Y, \quad y(x+1) = 1,08y(x), \quad n = 10.$$

Rovnici můžeme psát ve tvaru

$$y(x+1) = Ay(x) + B,$$

kde

$$A = 1,08$$
$$B = 0$$
$$C = Y - \frac{B}{1-A} = 20 - \frac{0}{1-1,08} = 20.$$

Určíme partikulární řešení

$$y(x) = \left(Y - \frac{B}{1-A}\right)A^n + \frac{B}{1-A} = \left(20 - \frac{0}{1-1,08}\right)1,08^{10} + \frac{0}{1-1,08} =$$
$$= 20 \cdot 1,08^{10} \approx \underline{\underline{43}}.$$

Příklad 7. *Určete, zda jsou funkce $5^x, x5^x$ a $x^2 5^x$ lineárně závislé nebo nezávislé na $\mathbb{N}_0$.*

Řešení: Funkce dosadíme do rovnice

$$c_1 5^x + c_2 x 5^x + c_3 x^2 5^x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Rovnici podělíme 5^x, čímž dostaneme

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Zvolíme $x = 0$, z čehož plyne, že $c_1 = 0$. Rovnici

$$c_2 x + c_3 x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

podělíme x, čímž dostaneme

$$c_2 + c_3 x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Opět zvolíme $x = 0$, a tedy získáme $c_2 = 0$ i $c_3 = 0$. Protože platí $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, jsou funkce lineárně nezávislé.

Určení lineární nezávislosti lze provést i jiným způsobem. Využijeme funkci $C(x)$, která se nazývá *casoratian* a je dána následujícím předpisem:

$$C(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) & \cdots & y_k(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x+k-1) & y_2(x+k-1) & \cdots & y_k(x+k-1) \end{pmatrix}$$

Věta 4. *Řešení $y_k(x)$ jsou lineárně nezávislá na množině M, jestliže existuje alespoň jedno $x \in M$ takové, že $C(x) \neq 0$.*

Příklad 8. *Najděte casoratian funkcí z příkladu 7 a zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé.*

Řešení:

$$C(x) = \det \begin{pmatrix} 5^x & x5^x & x^2 5^x \\ 5^{x+1} & (x+1)5^{x+1} & (x+1)^2 5^{x+1} \\ 5^{x+2} & (x+2)5^{x+2} & (x+2)^2 5^{x+2} \end{pmatrix}$$

Exercise 14A

1. For each equation you are given the first term of a sequence. Find the 4th term in each case :

   (a) $u_1 = 2$ and $u_n = u_{n-1} + 3$, $n \geq 2$

   (b) $u_1 = 1$ and $u_n = 3u_{n-1} + n$, $n \geq 2$

   (c) $u_1 = 0$ and $u_n - u_{n-1} = n + 1$, $n \geq 2$.

2. For each sequence write down a difference equation which describes it:

   (a) 3 5 7 9 11 $y(n+1) - y(n) = 2$

   (b) y_0 y_1 y_2
2 5 11 23 47 $y(n+1) - y(n) = 3(n+1)$

   (c) 1 2 5 14 41. $y(n+1) - g(n) = 3^n$
1 3 9 27

3. A vacuum pump removes one third of the remaining air in a cylinder with each stroke. Form an equation to represent this situation. After how many strokes is just 1 / 1 000 000 of the initial air remaining?

4. Write down the first four terms of each of these sequences and the associated difference equation.

   (a) $u_n = \sum_{r=1}^{n}(2r-1)$ (b) $u_n = \sum_{r=1}^{n}(10-r)$

   (c) $u_n = \sum_{r=1}^{n}3(2r+1)$

5. Write a simple computer program (say in Basic) which calculates successive terms of a sequence from a difference equation you have met. Here is one for the triangle numbers to help you.

```
10 REM"SEQUENCE OF TRIANGLE NUMBERS"
20 INPUT"NUMBER OF TERMS REQUIRED";N
30 CLS
40 U=0:PRINT"FIRST ";N;" TRIANGLE
   NUMBERS ARE"
50 FOR i=1 TO N:U=U+i:PRINTU:NEXTi
60 STOP
```

14.2 Iteration

Consider again the Tower of Hanoi.

You should have found a sequence of minimum moves as follows :

Number of rings	1	2	3	4	5	6	...
Number of moves	1	3	7	15	31	63	...

Successive terms are easily found by doubling and adding one to the previous term, but it takes quite a long time to reach the sixty-fourth term, which by the way is about 1.85×10^{19} or 18.5 million million million!

A different approach is to try to work 'backwards' from the nth term u_n, rather than starting at u_1, and building up to it. In this case :

$$u_n = 2u_{n-1} + 1, \quad n \geq 2 \qquad (1)$$

For example,

$$\begin{aligned} u_6 &= 2u_5 + 1 \\ &= 2 \times 15 + 1 \\ &= 31. \end{aligned}$$