1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty* budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k, \tag{2}$$

kde čísla $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$, (tzv. *počáteční podmínky*), pak hovoříme o *počáteční úloze.*

Definice 2. *Homogenní rovnicí* rozumíme rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Definice 3. *Charakteristickým polynomem rovnice* (3) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

Věta 4. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (3) s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\xi_1, \dots, \xi_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (3) s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, přičemž $\xi_j = \mu_j(\cos\nu_j + i\sin\nu_j)$, $\mu_j > 0$, $\nu_j \in \langle 0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, l$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice (3):

$$\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \dots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \dots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos\nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos\nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin\nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin\nu_l n\}
\end{array}$$

Algoritmus

1. Sestavíme charakteristickou rovnici.
2. Najdeme kořeny.
3. Sestavíme FSŘ.
4. Případně dopočteme konstanty z podmínek.
5. (Uděláme zkoušku.)

Příklady

1. Najděte řešení diferenčních rovnic:
   (a) $y(n+2) = 8y(n+1) - 15y(n)$, $y(0) = -1$, $y(1) = -1$
   (b) $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$
   (c) $y(n+2) + 16y(n) = 0$
   (d) $y(n+2) - 4y(n) = 0$, $y(0) = 3$, $y(1) = 2$
   (e) $y(n+2) - 16y(n) = 0$
   (f) $4y(n+2) + 25y(n) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$
   (g) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$
   (h) $9y(n+2) + 6y(n+1) + y(n) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$
   (i) $y(n+2) = 4y(n+1) - 8y(n)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$
   (j) $y(n+2) + 8y(n+1) + 16y(n) = 0$, $y(0) = 4$, $y(1) = 0$
   (k) $y(n+2) + 4y(n) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = -4$
   (l) $y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$
   (m) $y(n+2) + y(n) = 0$, $y(0) = 3$, $y(1) = 4$
   (n) $y(n+3) - 7y(n+2) + 16y(n+1) - 12y(n) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$

2. (a) $y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$
   (b) $y(n+3) + 2y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 0$
   (c) $y(n+3) + 3y(n+2) + 3y(n+1) + y(n) = 0$
   (d) $y(n+3) - 27y(n) = 0$
   (e) $y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = 0$
   (f) $y(n+3) + 5y(n+2) - 6y(n) = 0$
   (g) $y(n+1) - \dfrac{11}{6}y(n) + y(n-1) - \dfrac{1}{6}y(n-2) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$
   (h) $6y(n+4) - 5y(n+2) + y(n) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(2) = \frac{1}{2}$, $y(3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Bača má stádo o 20 ovcích, které se každý rok zvětší o 8%. Kolik bude ovcí za 10 let?

4. Jsou posloupnosti 5^n, $n5^n$ a $n^2 5^n$ lineárně závislé nebo nezávislé?

5. Napište diferenční rovnici, jejímž řešením je posloupnost
   (a) 3,5,7,9,11 (b) 2,5,11,23,47 (c) 1,2,5,14,41