4,17.° (Viz též V. Jarník, Integrální počet II. str. 300).

Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, buď $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, nechť funkce $f(x,\alpha)$ je definována v $M \times (a,b)$.

Nechť platí:

1/ pro sk.vš. $x \in M$ existuje $\lim\limits_{\alpha \to b_-} f(x,\alpha) = \psi(x)$,

2/ pro každé $\alpha \in (a,b)$ je $f^{*\mu} \in \mathcal{L}_M^{R}$

3/ pro sk.vš. $x \in M$ je $f(x,\alpha) \leqq f(x,\beta)$, kdykoliv $a < \alpha \leqq \beta < b$.

Potom je $\psi \in \mathcal{L}_M^{R}$ a platí

$$\lim_{\alpha \to b_-} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \psi(x)\,dx .$$

Důkazy těchto vět jsou vlastně jednoduchými důsledky Lebesgueovy a Leviho věty. Tyto věty si nemusíme pamatovat, v praxi můžete vždy postupovat jako v příkladu 4,15 - což nebylo vlastně nic jiného než důkazy vět 4,16 a 4,17 .

4,18. Spočtěte limity funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ v krajních bodech jejího "definičního oboru".

1/ Zjistíme, že $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ je konečný, právě když $s \in (0,+\infty)$. (Viz př. 3,43).

2/ Dokažte, že $\lim\limits_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$.

Zvolme libovolnou posloupnost s_n, $s_n \nearrow +\infty$. Potom

$x \in (0,1) \Rightarrow x^{s_1-1} e^{-x} \geqq x^{s_2-1} e^{-x} \geqq x^{s_3-1} e^{-x} \geqq \ldots \geqq 0$,

$x \in (1,+\infty) \Rightarrow 0 \leqq x^{s_1-1} \cdot e^{-x} \leqq x^{s_2-1} \cdot e^{-x} \leqq x^{s_3-1} e^{-x} \leqq \ldots$

Odtud je vidět, že nelze použít Leviho větu (posloupnost funkcí $x^{s_n-1} e^{-x}$ není monotonní v celém intervalu $(0,+\infty)$) ani Lebesgueovu větu ($\sup\limits_{n\in N} x^{s_n-1} e^{-x} = +\infty$ pro $x \in (1,+\infty)$).

Nicméně lehko zjistíte (proveďte podrobně ! , pokud možno podle obou vět), že

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx = +\infty ,$$

tedy $\lim\limits_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$.

3/ Obdobně dokažte, že $\lim\limits_{s\to 0_+} \Gamma(s) = +\infty$.

4,19. Dokažte, že $\lim\limits_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = -\infty$!

Zvolte libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \in (\frac{9}{10}, 1)$, $\alpha_n \nearrow 1$.

Potom $0 \geqq \dfrac{1}{\log(\alpha_1 - \sin x)} \geqq \dfrac{1}{\log(\alpha_2 - \sin x)} \geqq \ldots$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.