7.1. Věta (Záměna $\sum$ a $\int$). Nechť $D \in \mathcal{S}$, g_j, $j=1,2,\dots$, jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna alespoň 1 z násl. podmínek

(a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné, $|q|<1$

a $\int_D \frac{a}{1-q}\,d\mu$ konv.

(b) $\sum_j \int_D |g_j| < \infty$

(c) $\int_D \sum_j |g_j| < \infty$

(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq 0$, $h_j \to 0$

h_1 je integrovatelná

Pak $\sum_j g_j$ konv. s.v. a platí

$$\int_D \sum_j g_j\,d\mu = \sum_j \int_D g_j\,d\mu.$$

Dk (a) Označme $f_n := \sum_{j=1}^n aq^j$. Z formule pro součty geom. řady pak máme $f_n = a\,\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$ $\left(\sum_{j=1}^n\right)$

pak ale, neb $|q|<1$, máme $|f_n| \leq a\,\frac{2}{1-q}$.

Neb z předpokladu máme, že $\int_D \frac{a}{1-q} < \infty$, máme integrovatelnou majorantu a můžeme aplikovat Leb. větu pro $\sum$.

(c) Neboť funkce $g := \sum_j |g_j|$ je integrovatelná, máme z věty 4.8, že je konečná s.v. V bodech, kde je g konečná, máme i konvergenci $\sum_j g_j$. (Z absolutní konv. plyne neabsolutní.)

Pak ale máme $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} |g_j| < g$ → majorantu

(samozřejmě s.v.)

Použijeme Leb. větu pro Σ.

(b) Neboť $|g_j| \geq 0$, máme z Leviho pro Σ, že

$$\infty > \int \sum |g_j| = \sum \int |g_j| < \infty.$$ A použijeme (c).

(d) Pro pevné x konvergují Σ podle Leibnize.

Navíc platí $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j h_j \leq h_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

→ majorantu z předpokladu

Částečné součty tedy mají majorantu

a můžeme užít Lebesguea pro Σ.

∎