u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

5,70. Dokažte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\,dy\,dz = \frac{4}{5} \pi abc \,,$$

b/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad x^2 + y^2 \leqq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x + y + z)^2 \, dx\,dy\,dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{\pi a^5}{5} \left(18 \sqrt{3} - \frac{97}{6}\right) ,$$

c/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad y^2 + z^2 \leqq x^2 \,, \quad x \geqq 0 \,, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2 \right\}$

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\,dy\,dz = \frac{\pi R^5}{5} \left(2 - \sqrt{2}\right) ,$$

d/ M je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2y \,, \quad z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2} \, dx\,dy\,dz =$

$$= \frac{a^4}{144} \,,$$

e*/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \quad x \geqq 0 \,, \; y \geqq 1 \,, \; z \geqq 1 \,, \; xyz \leqq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \,.\, x^2 y \, dx\,dy\,dz = \frac{e}{2} - 1$$

Zaveďte substituci $x = u \,, \quad y = \frac{u+v}{u} \,, \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}$,

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \,, \quad x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z \, dx\,dy\,dz =$

$$= \frac{13}{4} \pi \,.$$

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$.

(viz též př. 6,44 .)

Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leqq 0$, $b > 0$ anebo pro $a > 0$, $b \leqq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0$, $b > 0$, nechť např. je $b < a$.

Uvažujme následující integrál I ,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2} \, dx\,dy \,, \text{ kde } M = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a) \right\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M , tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}_M^R$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) ,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

Odtud vyplývá, že

$$I\,(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy . \rfloor$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$.

$\lceil$ 1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^y}{\log x} \right) dy = \int_a^b x^y \, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y \, dx \, dy \; , \quad M = \{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b) \}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} \, dx = \iint_M x^y dx \, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} \; .$$

5,73. Poznámka:

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} \, dx = \log 2 \quad (b = 1 \; , \quad a = 0) \; ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x} \, dx = \log \frac{3}{2} \quad (b = \frac{1}{2} \; , \quad a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad 0 < b \leq a \; .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $$\frac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R \quad \text{pro} \quad M = \{ [x,y] \in E_2 \; ;$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad y \in (0,1) \} \; ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2\sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad \text{pro} \quad |A| > |B| \; .$$

B/ Použijte též vztahu

25535 / 10

$$\frac{1}{\sin x} \cdot \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} = 2a \int_0^b \frac{dy}{a^2 - y^2 \sin^2 x} \quad .$$

Jaký bude výsledek pro $a \leq b < 0$?

5,75. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+\sqrt{2})$.

Použijte vztahů

1/ $\displaystyle\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$,

2/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$.

5,76. Dokažte následující tvrzení

a/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ pro $a \geq 0$, $b \geq 0$

Použijte příkladu 5,84 , viz též 6,35

b/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a}$ pro $a > 0$, $b > 0$,

c/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \log \frac{b}{a}$ pro $a > 0$, $b > 0$,

d/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) - \log(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx = \pi(a-b)$ pro $a,b \in E_1$,

e/ $\displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = \sqrt{\pi}(b-a)$ pro $a,b \in E_1$,

f/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin x}{a}\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}$ pro $a > 0$, $b \geq 0$

$\displaystyle\frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin x}{a} = \int_0^1 \frac{ab}{a^2 + b^2y^2 \sin^2 x}\, dy$

Další část této kapitoly věnujeme otázkám konvergence a divergence integrálů funkcí více proměnných. Důležitou roli zde bude hrát věta o substituci – ještě jednou si ji zopakujte !

25535 210