## 12 Trojný integrál - Transformace integrálů

(1a)

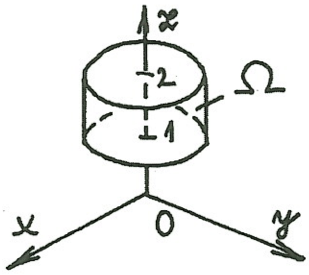
**111. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: 1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$.

1

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0,1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 1,2\rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.



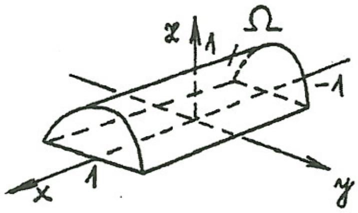

Obrázek 41: $\Omega: 1 \le z \le 2, x^2+y^2 \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi)\cdot\varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

(1j)

**112. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$.

**Řešení** Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou $x$. Viz Obrázek 42.




Obrázek 42: $\Omega: -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2+z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic". Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho\cos\varphi,$$
$$z = \varrho\sin\varphi.$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\ , \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = r\cos t \sin s \\ y = r \sin t \sin s \\ z = r\cos s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le s \le \pi\ .$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r\sin t \sin s & r\cos t \sin s & 0 \\ r\cos t\ sins & r\sin t\cos t & -r\sin s \end{pmatrix}\right| = r^2 \sin s\ ,$$

dostaneme

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t\sin s, r\sin t\sin s, r\cos s)\cdot r^2\sin s\, dr\, dt\, ds\ .$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = r\cos t \cos s \\ y = r \sin t \cos s \\ z = r\sin s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}\ ,$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2\cos s$.

2

**Příklad 8.17:**
Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\}\ .$$

**řešení:**
Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu $\Omega$ nám dává $1 \le r \le 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos s}{\sqrt{r^2\cos^2 t\sin^2 s + r^2\sin^2 t\sin^2 s}}\cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$
$$= \int_1^3 r^2\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, ds = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi\ .$$

**Příklad 8.18:**
Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\}\ .$$

**řešení:**
Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu $\Omega$ nám dává $1 \le r \le 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2\sin^2 s \le r^2\cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \le 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \le s \le \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou $t$ není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

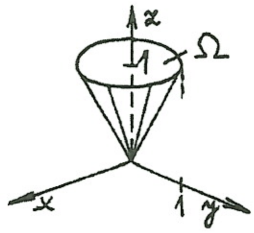
$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} (r^2\cos^2 t\sin^2 s + r^2\sin^2 t \sin^2 s)\cdot r\cos s \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$
$$= \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} r^5 \sin^3 s\cos s\, dr\, dt\, ds = \underbrace{\int_1^2 r^5\, dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s\cos s\, ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi\ .$$

(1f)

**95. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: z=1, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(3)

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je kužel. Viz Obrázek 25. Obor $\Omega$ zapíšeme jako oblast typu $(x,y,z)$. Platí $\Omega = \{[x,y,z]; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$.




Obrázek 25: $\Omega: z=1, z=\sqrt{x^2+y^2}$

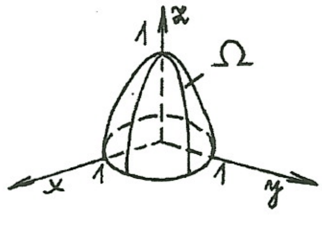
$$\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[y(1-x^2)-\frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x=\sin t \\ -1\to-\frac{1}{2}\pi, 1\to\frac{1}{2}\pi \end{array}\right| = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{4}\pi.$$

**96. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: z=0, z=1-x^2-y^2$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je ohraničen paraboloidem a rovinou. Viz Obrázek 26. Obor $\Omega$ zapíšeme jako oblast typu $(x,y,z)$ : $\Omega = \{[x,y,z]; -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le 1-x^2-y^2\}$.




Obrázek 26: $\Omega: z=0, z=1-x^2-y^2$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{0}^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[y(1-x^2)-\frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x == \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

③ $\int\limits_M z \, d\lambda$ $\qquad M: \; x^2+y^2 \le z^2 \le 1 \;, z \ge 0$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$z = z$ $\qquad$ pak $\qquad 0 \le r^2 \le z^2 \le 1$

$$\underset{\alpha}{\int_0^{2\pi}} \underset{z}{\int_0^{1}} \underset{r}{\int_0^{z}} z \cdot \overset{J_\varphi}{\overset{\downarrow}{r}} \, dr\, dz\, d\alpha = \int \int \frac{1}{2} z^3 \, dz\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{8} z^4 \right]_0^1 d\alpha$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} 1 \, d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\,, \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \sin s \\ y = r \sin t \sin s \\ z = r\cos s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le s \le \pi\,.$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r\sin t \sin s & r\cos t \sin s & 0 \\ r \cos t\ sins & r\sin t \cos t & -r\sin s \end{pmatrix}\right| = r^2 \sin s\,,$$

dostaneme

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t \sin s, r\sin t \sin s, r\cos s)\cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds\,.$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \cos s \\ y = r \sin t \cos s \\ z = r\sin s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}\,,$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2 \cos s$.

**Příklad 8.17:**

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz \quad \text{, kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\}\,.$$

**řešení:**

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu $\Omega$ nám dává $1 \le r \le 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos s}{\sqrt{r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}}\cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$
$$= \int_1^3 r^2\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, ds = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi\,.$$

**Příklad 8.18:**

4)

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz \quad \text{, kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\}\,.$$

**řešení:**

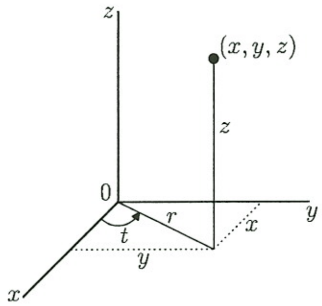
Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu $\Omega$ nám dává $1 \le r \le 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \le r^2 \cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \le 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \le s \le \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou $t$ není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} \left(r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s\right)\cdot r\cos s \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$
$$= \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} r^5 \sin^3 s \cos s\, dr\, dt\, ds = \underbrace{\int_1^2 r^5\, dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s\, ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi\,.$$

kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a} \quad z^* \in \mathbb{R}.$$




Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r,t,z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t & 0 \\ \sin t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r.$$

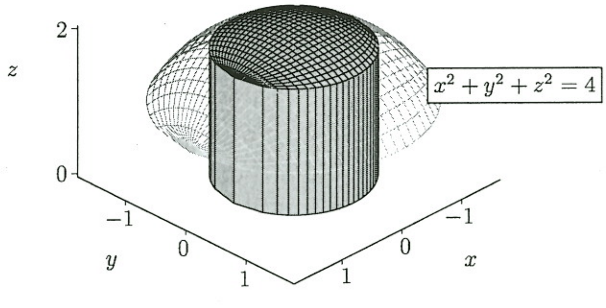
**Poznámka 2.20.** Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa $\Omega$, přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.

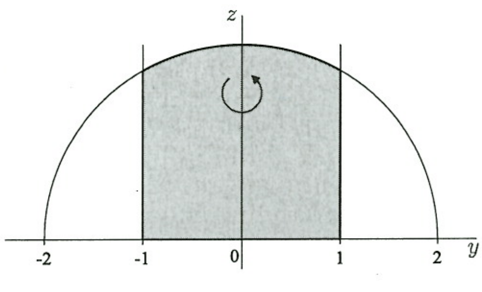
5

**Příklad 2.21.** Vypočtěte integrál $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^4 + y^4)\, z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 \leqq 1 \ \wedge\ z \geqq 0 \ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4\right\}.$$

*Řešení.* Množina $\Omega$ je válec „seříznutý“ shora kulovou plochou.




Zavedeme-li válcové souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z, \end{aligned}$$

obdržíme omezení

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq z \leqq \sqrt{4-r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint\limits_{M_{rtz}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{(r,t,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ 0 \leqq r \leqq 1 \ \wedge\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \ \wedge\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{4-r^2}\right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \left( r^5 \left( \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, \mathrm{d}z \right)\right) \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \left( r^5 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4r^5 - r^7\right) \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2r^6}{3} - \frac{r^8}{8}\right]_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}\right) \mathrm{d}t = \frac{13}{48} \left[\frac{3}{4} t + \frac{\sin 4t}{16}\right]_0^{2\pi} = \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{13}{32}\pi.$$

▲

**Poznámka 2.22.** Rozmyslete si, že substitucí do cylindrických souřadnic a Fubiniovou větou dostaneme totéž, jako užitím Fubiniovy věty a následné substituce do polárních souřadnic v příslušném dvojném integrálu.

### 2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$x = a \cdot \rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = b \cdot \rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = c \cdot \rho \sin\vartheta,$$

kde

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi\rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$
$$\vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos\vartheta.$$

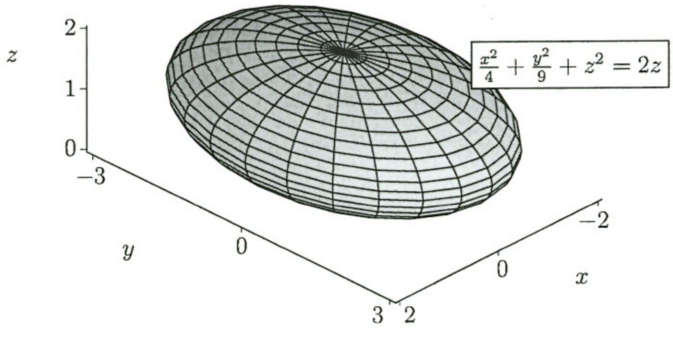
**Poznámka 2.25.** Substituce do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso $\Omega$, přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.

**Příklad 2.26.** Vypočtěte integrál $I = \iiint\limits_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde

(6)

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z \right\}.$$

*Řešení.* Podmínku $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z - 1)^2 \leqq 1$. Odtud je vidět, že $\Omega$ je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.




Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$x = 2\rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = 3\rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = \rho \sin\vartheta.$$

(6)

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2\cos\vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leqq 2\rho\sin\vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid $\Omega$ je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \qquad \vartheta \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle, \qquad \rho \in \langle 0, 2\sin\vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint\limits_M \rho\sin\vartheta \cdot |J| \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \iiint\limits_M 6\rho^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta,$$

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \ \wedge\ 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 0 \leqq \rho \leqq 2\sin\vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$I = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\sin\vartheta} 6\rho^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta \left[ \frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2\sin\vartheta} \mathrm{d}\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^5\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ \sin\vartheta = u \\ \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}u \\ 0 \mapsto 0,\ \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| =$$

$$= 48\pi \int_0^1 u^5 \,\mathrm{d}u = 48\pi \left[ \frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi.$$

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunuté“ zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= 3\rho\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= 1 + \rho\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2\cos\vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \leqq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z-1)^2 \leqq 1$, obdržíme $\rho^2 \leqq 1$, tj. $0 \leqq \rho \leqq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint\limits_N (1 + \rho\sin\vartheta) \cdot |J| \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \iiint\limits_N (1 + \rho\sin\vartheta) \cdot 6\rho^2\cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 0 \leqq \rho \leqq 1 \right\}.$$

6

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál $I$ platí

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[ 6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, \mathrm{d}\rho = 24\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi.$$

▲

## 2.4 Některé aplikace trojného integrálu

### 2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa $M$ definujeme pomocí vztahu

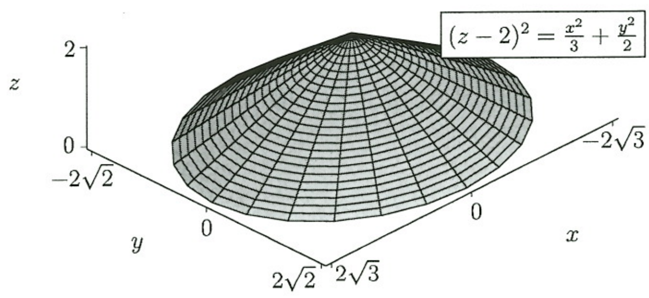
$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

**Poznámka 2.27.** Uvažujme množinu $T$ stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.

**Příklad 2.28.** Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \qquad z = 0.$$

*Řešení.* Naše těleso $M$ je částí eliptického kužele.



Viviani

6. $x^2+y^2+z^2 \leq 16$

$x^2+y^2 \leq 4y$

$x^2+(y-2)^2 \leq 4$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$J_\varphi = r$

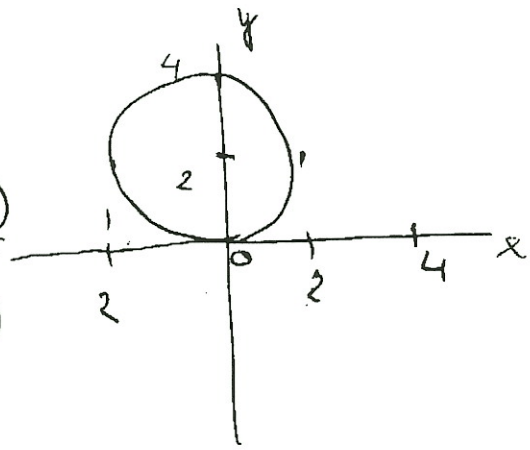
$r^2+z^2 \leq 16$

$0 \leq r^2 \leq 4r\sin\varphi$

$0 \leq r \leq \sin\varphi$

$\varphi \in (0, \pi)$

$r \in (0, \sin\varphi)$




$z^2 \leq 16 - r^2$

$-\sqrt{16-r^2} \leq z \leq \sqrt{16-r^2}$

mne je sym. přes osu z, tedy

$$2\int_0^\pi \int_0^{4\sin\varphi} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz\,dr\,d\varphi = 2\iint r\sqrt{16-r^2}\, dr\,d\varphi =$$

$\varphi \quad r \quad z$

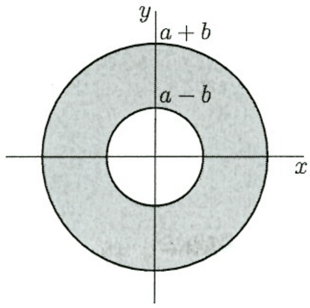
$$= 2\int_0^\pi \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^\pi -\frac{1}{3}(\overbrace{16-16\sin^2\varphi}^{16\cos^2\varphi})^{3/2} + \frac{1}{3}(16)^{3/2}\, d\varphi$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\pi 64(\cos^2)^{3/2} - 64\, d\varphi \overset{D}{\underset{0}{=}} -\frac{64\cdot 2}{3}\cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi - 64\, d\varphi$$

$$= -\frac{256}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi) - 1 = -\frac{256}{3}\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{256}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

(7)




Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso $M$ v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad r \in \langle a-b, a+b\rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2-(r-a)^2}, \sqrt{b^2-(r-a)^2}\right\rangle.$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa $M$ platí

$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_{a-b}^{a+b}\left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi\cdot 2\cdot\int_{a-b}^{a+b} r\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,\mathrm{d}r = \left|\begin{array}{c} \text{substituce} \\ r-a=u \\ \mathrm{d}r=\mathrm{d}u \\ a-b\mapsto -b \\ a+b\mapsto b \end{array}\right| = 4\pi\int_{-b}^{b}(u+a)\sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\pi\int_{-b}^{b}\underbrace{u\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{lichá v } u}\,\mathrm{d}u + 4\pi a\int_{-b}^{b}\underbrace{\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{sudá v } u}\,\mathrm{d}u = 8\pi a\int_0^b\sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \text{substituce} \\ u=b\sin s \\ \mathrm{d}u=b\cos s\,\mathrm{d}s \\ 0\mapsto 0,\ b\mapsto\frac{\pi}{2} \end{array}\right| = 8\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2-b^2\sin^2 s}\cdot b\cos s\,\mathrm{d}s = 8\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 s\,\mathrm{d}s =$$

$$= 8\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2s}{2}\,\mathrm{d}s = 8\pi ab^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}\right) = 2\pi^2 ab^2.$$

**Poznámka 2.29.** V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná $a$, $b$) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r \cos t, \\ y &= b \cdot r \sin t, \\ z &= z^* (= z), \end{aligned}$$

kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{a} \quad z^* \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r \left( \cos^2 t + \sin^2 t \right) = ab \cdot r.$$

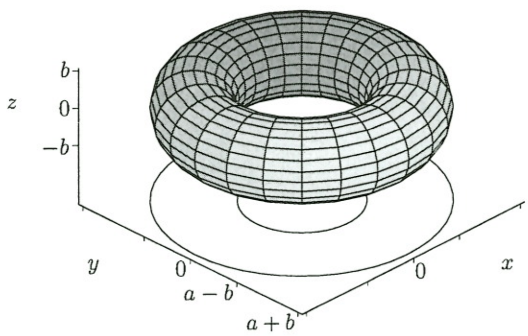
**Domácí cvičení 2.30.** Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).

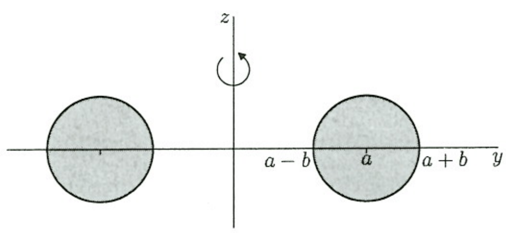
7

**Příklad 2.31.** Vypočtěte objem tělesa $M$ ohraničeného plochou (anuloidem)

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$

*Řešení.*




Víme, že pro objem tělesa $M$ platí $\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \, dx \, dy \, dz$. Řezem tělesa $M$ rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.

Jakobián transformace je

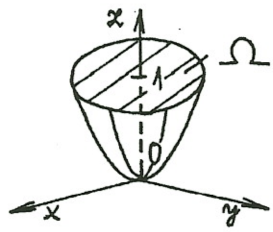
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\varrho\,\mathrm{d}\varrho\cdot\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1}\cdot\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1\cdot[\varphi]_0^{\pi} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \pi.$$

9

**113. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2+y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.




Obrázek 43: $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0,1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2,1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*}\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*}\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1(\int_0^{2\pi}(\int_{\varrho^2}^1\varrho^2\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1(\int_0^{2\pi}\varrho^2\,[z]_{\varrho^2}^1\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$

$$= \int_0^1(\int_0^{2\pi}\varrho^2(1-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1\varrho^2(1-\varrho^2)\,[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{3}\varrho^3-\frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

**114. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4-2\sqrt{x^2+y^2}$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4-2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0,2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0,4-2\varrho\rangle.$$

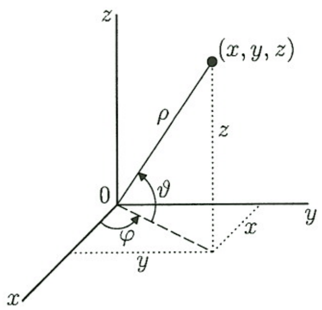
### 2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

Uvažujme zobrazení

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\varphi \cos\vartheta, \\
y &= \rho \sin\varphi \cos\vartheta, \\
z &= \rho \sin\vartheta,
\end{aligned}
$$

kde

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$
$$\vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$




Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$
J(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta & -\rho \sin\varphi \cos\vartheta & -\rho \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta & \rho \cos\varphi \cos\vartheta & -\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \rho \cos\vartheta \end{vmatrix} =
$$

$$
= \sin\vartheta \left(\rho^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\right) + \rho \cos\vartheta \left(\rho \cos^2\vartheta\right) = \rho^2 \cos\vartheta \left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) = \rho^2 \cos\vartheta.
$$

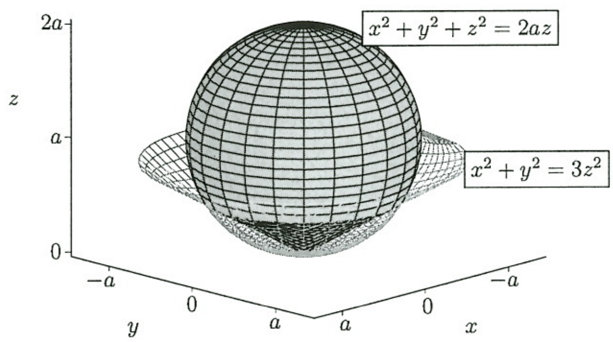
**Poznámka 2.23.** Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa $\Omega$, přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.

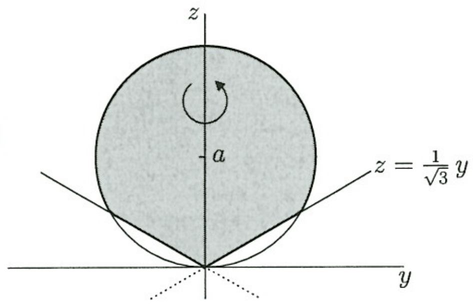
(10) **Příklad 2.24.** Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint\limits_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega_a = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az \; \wedge \; x^2 + y^2 \leqq 3z^2 \right\}.$$

*Řešení.* Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqq a^2$. Množina $\Omega_a$ je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem $a$) a rotačního kužele (viz obrázek).

10




Zaveďme sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\cos\vartheta,\\ y &= \rho\sin\varphi\cos\vartheta,\\ z &= \rho\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 2az \quad \text{a} \quad x^2+y^2 \leqq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leqq 2a\rho\sin\vartheta \ \wedge\ \rho^2\cos^2\vartheta \leqq 3\rho^2\sin^2\vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geqq 0$)

$$\rho \leqq 2a\sin\vartheta \ \wedge\ \cos^2\vartheta \leqq 3\sin^2\vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a z druhé následně $\cos\vartheta \leqq \sqrt{3}\sin\vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad \vartheta \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a\sin\vartheta\rangle.$$

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$I_a = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\sin\vartheta}\rho^2\cdot\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot 2^5\cdot a^5\cdot\sin^5\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left|\begin{array}{c}\text{substituce}\\ \sin\vartheta = u\\ \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}u\\ \frac{\pi}{6}\mapsto\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\mapsto 1\end{array}\right| = \frac{2\pi}{5}\cdot 32a^5\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^5\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{64}{5}\pi a^5\left[\frac{u^6}{6}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{64}{5}\pi a^5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right) = \frac{21}{10}\pi a^5.$$

▲

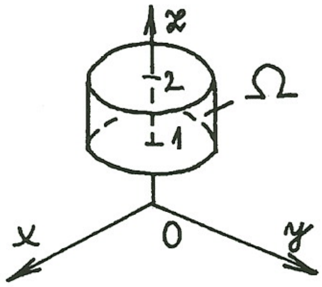
# 12 Trojný integrál - Transformace integrálů

**111. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 1, 2\rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.



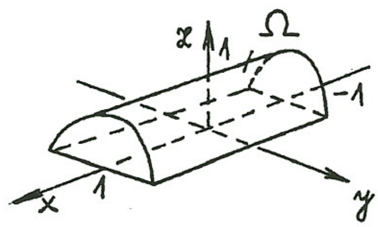

Obrázek 41: $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi) \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

11

**112. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$.

**Řešení** Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou $x$. Viz Obrázek 42.




Obrázek 42: $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho \cos\varphi,$$
$$z = \varrho \sin\varphi.$$

11

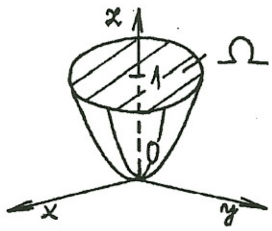
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

**113. Příklad** Spočtěte $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2+y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.




Obrázek 43: $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_{\Omega^*} \varrho^2\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\, \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \varrho^2\, [z]_{\varrho^2}^1\, \mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho =$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\, \mathrm{d}\varphi\Big)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\, [\varphi]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

12

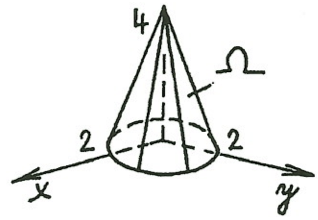
**114. Příklad** Spočtěte $\iiint_{\Omega} z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

12




Obrázek 44: $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$

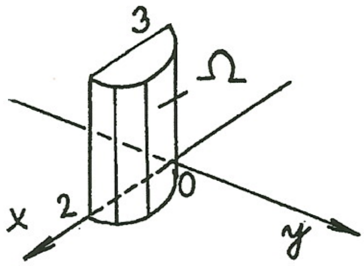
$$\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho \, d\varrho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{4-2\varrho} z\varrho \, \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big) d\varrho = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2\varrho} \varrho \, \mathrm{d}\varphi\Big) d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho \, \mathrm{d}\varphi\Big) d\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho \, \mathrm{d}\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

**115. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}; \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$.

**Řešení** Vztah $x^2+y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \le 0$ plyne, že $\Omega$ je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 2\cos\varphi\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 3\rangle.$$




Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$

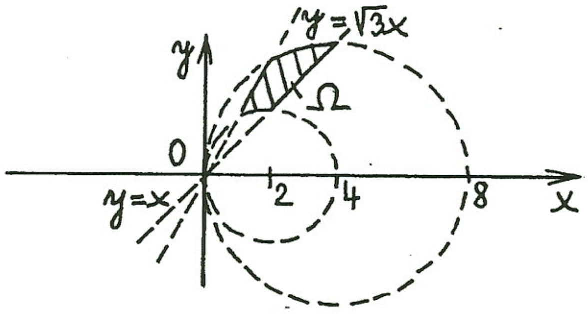
$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2 \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \Big(\int_0^3 z\varrho^2 \, dz\Big) d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \varrho^2 \, d\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 8.$$

# 13 Aplikace vícerozměrných integrálů

**121. Příklad** Spočtěte obsah rovinného obrazce $M$ ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

**Řešení** Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.




Obrázek 51: $M$: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce $M$ určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože $\Omega$ je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \leq \varrho \leq 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \big[\varrho^2\big]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

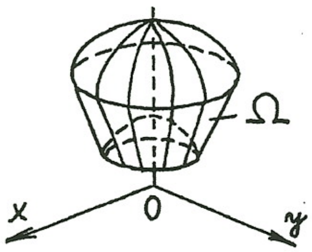
**122. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2}).$$




Obrázek 52: $\Omega : x^2+y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0$

**123. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6-(x^2+y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2} = 6-(x^2+y^2)$. Máme $x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}-6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2+y^2$. Odtud $z^2+z-6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2+y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\varrho \in \langle 0, 2 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle \varrho, 6-\varrho^2 \rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.


Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho\, \mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^2 (\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho =$$
$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho-\varrho^2-\varrho^3)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

**124. Příklad** Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x,y) = 1-x^2-y^2$, kde $f(x,y) \geq 0$.

**Řešení** Velikost povrchu $S$ paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M$ je kruh $x^2+y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$