1 VZOR

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < x\}$$

$x = r \cos\alpha$ $\qquad \varphi(r,\alpha) \mapsto (x,y)$

$y = r \sin\alpha$

$\alpha \in (0,2\pi)$ $\qquad \varphi : (0,2\pi) \times (0,\infty) \to$

$r \in (0,\infty)$ $\qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,\infty) \times \{0\}\}$

Možno i $\alpha \in (-\pi,\pi)$

$J_\varphi(r,\alpha) = r$

$\varphi^{-1}(M)$: $\quad 0 < r^2 < r\cos\alpha$

$\underline{0 < r < \cos\alpha}$ $\quad \to \cos\alpha > 0 \quad \to \underline{\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$

$\varphi^{-1}(M) = [r,\alpha] \in \mathbb{R}^2,\quad r \in (0,\cos\alpha),\ \alpha \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(M)} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,dr\,d\alpha =$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\alpha} 1\ dr\,d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha = \underline{\underline{2}}$$

křivkou stačí počítat obsah pouze té části M, která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$0 \leq (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2,$$
$$0 \leq r^4 \leq r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \tag{7}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$\cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle. \tag{8}$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M, pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos\phi \geq 0 \wedge \sin\phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. Potom

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi \,\mathrm{d}\phi = 1\ .$$

2

Příklad 1.27. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{a} \ \boxed{J = abr,} \tag{9}$$

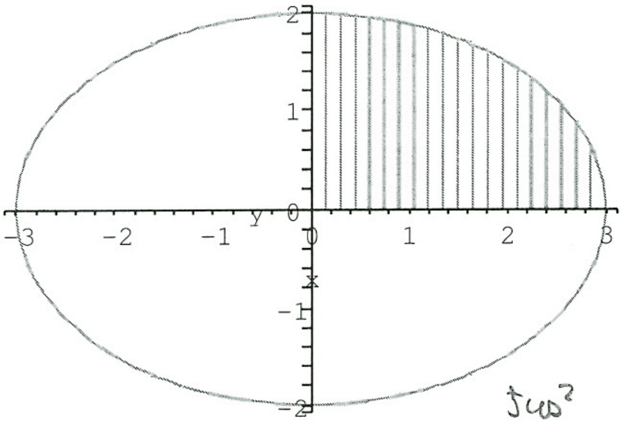
V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M, která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

$$\boxed{x = 3r\cos\phi, \quad y = 2r\sin\phi \quad \text{a} \ J = 6r,}$$

a dosazením do M (za podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$) dostaneme

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 11

$9\cos^2 \underbrace{+4\cos^2 +4\sin^2}_{4}$

2

Odtud

$$\mu(M) = \int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A \;=\; 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \left(9r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi\right) 6r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi =$$

$$= 6\int_0^{\pi/2} \boxed{\left(9\cos^2\phi + 4\sin^2\phi\right)}\,\mathrm{d}\phi = \frac{39}{2}\pi\,.$$

Příklad 1.28. *Vypočítejme obsah části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2 = 2x$ (Obr. 12).*

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P, která je částí grafu funkce $z = f(x,y)$, $(x,y) \in M$ platí

$$S = \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}A. \tag{10}$$

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $z^2 = 2x$ do roviny $z = 0$

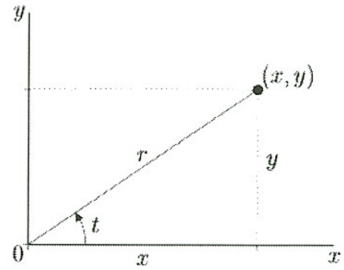
$$\sqrt{2x} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tj,} \quad x^2+y^2 = 2x,\; z = 0.$$

Je tedy

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1,0)$ a poloměrem 1. Dále je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



Přímým výpočtem zjistíme, že

$$J(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

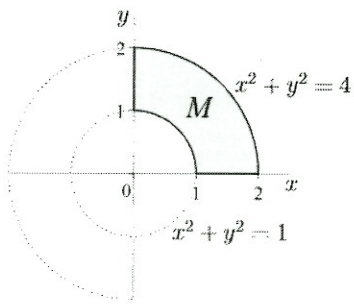
Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M, přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

3

Příklad 1.36. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \geqq 0 \ \wedge\ y \geqq 0 \ \wedge\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikruží se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$\boxed{x = r\cos t, \quad y = r\sin t} \qquad (J(r,t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme, že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leqq r \leqq 2$. Proto platí

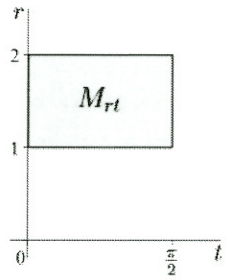
$$M = \left\{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 1 \leqq r \leqq 2\right\}. \tag{1.2}$$

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 1 \leqq r \leqq 2\right\}.$$



Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

3

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{J(r, t)}_{r} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadaná. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geqq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geqq 0, \quad r \sin t \geqq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leqq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leqq 4.$$

Z poslední podmínky (a $r \geqq 0$) získáme $1 \leqq r \leqq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geqq 0$ a $\sin t \geqq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

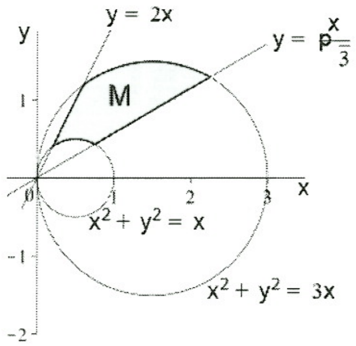
5

Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x \ \wedge \ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.

5



Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Protože pro každé $(x, y) \in M$ platí $x > 0$ a $y > 0$, ze vztahů $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ (a $r \geqq 0$, $t \in \langle 0, 2\pi)$) plyne $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $r > 0$. Z podmínky $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x$ plyne

$$\frac{r\cos t}{\sqrt{3}} \leqq r\sin t \leqq 2r\cos t,$$

odkud

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \operatorname{tg} t \leqq 2,$$

tj. $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2\rangle$. Podobně, z podmínky $x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x$ obdržíme

$$r\cos t \leqq \underbrace{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}_{r^2} \leqq 3r\cos t,$$

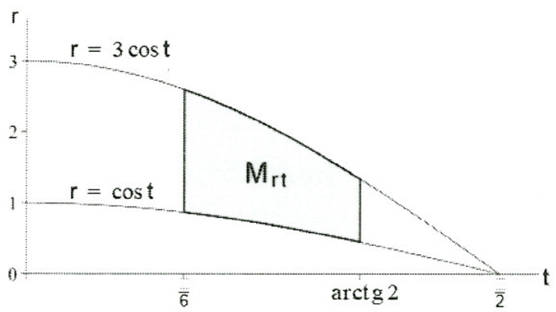
což dává nerovnost $\cos t \leqq r \leqq 3\cos t$.

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{(r, t) \in \mathbb{R}^2 \colon\; t \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2\rangle \;\wedge\; \cos t \leqq r \leqq 3\cos t\right\}.$$



Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

5

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{(r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{r^3} \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3\cos t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9\cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{9} \left[\operatorname{tg} t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

▲

Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \quad \text{a} \quad \cos t \leqq r \leqq 3\cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r \cos t, \\ y &= b \cdot r \sin t, \end{aligned}$$

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geqq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi)$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi)$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

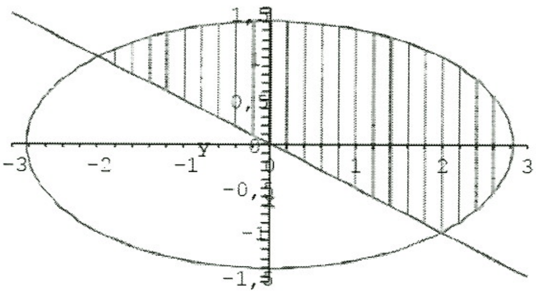
$$J(r, t) = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r\cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblasti, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).

Příklad 1.41. Vypočtěte integrál $\iint\limits_M (x - 2y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \ \wedge \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení.



Obr. 6

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$x \leq y \leq x+1 \wedge 1-x \leq y \leq 2-x\,,$$

tj.

(1) $$0 \leq y-x \leq 1 \wedge 1 \leq y+x \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = y-x$ a $v = y+x$. Dosazením u a v do (1) dostaneme

$$0 \leq u \leq 1 \quad \wedge 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \frac{1}{2}(v-u)$ a $y = \frac{1}{2}(v+u)$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\int\limits_M 4xy\,\mathrm{d}A = \int_1^2 \int_0^1 (v-u)(u+v)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_0^1 (v^2-u^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1.$$

Příklad 1.22. *Vypočítejme dvojný integrál*

4

$$\int\limits_M x^2y^2\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x\right\}.$

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x,$$

tj.

(2) $$1 \leq xy \leq 2 \wedge 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \leq u \leq 3 \quad \wedge 1 \leq v \leq 2.$$

4

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{uv}}{v^2} \\ \frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}\,.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \dfrac{1}{2v}$ dostaneme

$$\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}A = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{u^2}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{13\ln 2}{2}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastnosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x(u,v),y(u,v))}\,.$$

Pro $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ je tedy

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}\,.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u,v),y(u,v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u,v) = \frac{1}{2v}\,.$$

Příklad 1.23. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y^2 \le 2x\right\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y^2 \le 2x,$$

tj.

$$2 \le xy \le 3 \wedge 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2. \tag{3}$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \dfrac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$2 \le u \le 3 \quad \wedge 1 \le v \le 2.$$

6 $\lambda(M)$, $M = \{ (x+y)^4 < a x^2 y, \ x > 0 \}$, $a > 0$

$x = r \cos^2 \alpha$ $\qquad r \in (0, \infty)$

$y = r \sin^2 \alpha$ $\qquad \alpha \in (0, \pi/2)$ nepř.

$J_\varphi = r \sin 2\alpha$

$\varphi^{-1}(M)$: $\quad 0 < r^4 < a r^3 \cos^4 \sin^2 \alpha$

$0 < y \quad \to 0 < r \sin^2 \alpha$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha} r \sin 2\alpha \, dr \, d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \sin \alpha \cos \alpha \cdot a^2 \cos^8 \alpha \sin^4 \alpha \, d\alpha =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^9 \alpha \sin^5 \alpha \, d\alpha \overset{\cdots}{=} \frac{a^2}{210}$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} .$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$; $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{3v} .$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}A = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3}\frac{u}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{5\ln 2}{6}.$$

7

Příklad 1.24. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \text{a } J = r. \tag{4}$$

V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2\rangle \times \langle \pi/4, \pi/3\rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{array}{cc} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, & x \le y \le \sqrt{3}x, \\ 1 \le r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \le 4, & r\cos\phi \le r\sin\phi \le \sqrt{3}r\cos\phi, \\ 1 \le r \le 2, & 1 \le \operatorname{tg}\phi \le \sqrt{3}, \\ & \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{3}. \end{array}$$

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_N \sqrt{r^2}r\,\mathrm{d}A = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3}\,\mathrm{d}\phi = \frac{7}{36}\pi . \end{aligned}$$

Příklad 1.25. *Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ *a* $z = 0$.

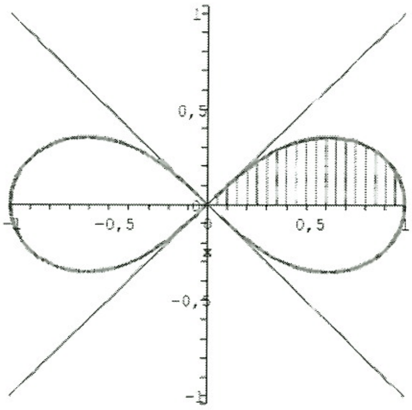
postupně dostaneme

$$0 \le r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \le r(\cos\phi + \sin\phi),$$
$$0 \le r \le (\cos\phi + \sin\phi).$$

Z podmínky $0 \le r \le \cos\phi + \sin\phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\int_M (x+y)\,\mathrm{d}A = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos\phi+\sin\phi} \left(r^2(\cos\phi + \sin\phi)\right)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi =$$
$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\phi + \sin\phi)^4\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\,.$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (6).



Obr. 10

Příklad 1.26. *Vypočítejme obsah množiny M, která je ohraničená lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).*

8

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A,$$

kde v našem případě je

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2\right\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto

(8)

křivkou stačí počítat obsah pouze té části M, která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2,\\
0 &\leq r^4 \leq r^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi),\\
0 &\leq r \leq \sqrt{\cos^2\phi-\sin^2\phi}=\sqrt{\cos 2\phi}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$\cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle. \qquad (8)$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M, pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos\phi \geq 0 \wedge \sin\phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Potom

$$\mu(M)=\int_M \mathrm{d}A = 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi = 1\,.$$

Příklad 1.27. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{a } J = abr. \qquad (9)$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ rovnici $r=1$.

Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M, která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a=3$, $b=2$, tj.

$$x = 3r\cos\phi, \quad y = 2r\sin\phi \quad \text{a } J = 6r,$$

a dosazením do M (za podmínky $x\geq 0$, $y\geq 0$) dostaneme

$$0\leq r\leq 1, \quad 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}.$$

Nyní máme dokázáno tvrzení v případě nezáporné funkce f. Je-li f obecná, napíšeme ji jako rozdíl kladné a záporné části, $f = f_+ - f_-$, kde

$$f_+ = \max\{f, 0\}, \quad \text{a} \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Aplikací již dokázaného tvrzení na (nezáporné) funkce f_+ a f_- dostaneme obecný případ. □

Poznámka 3.13. Předpoklady ve Větě 3.12 bychom mohli zeslabit na to, že funkce f může být spojitá jen na vnitřku $\Phi(T)$ a transformace Φ by stačila být třídy C^1 na vnitřku T. Použili bychom stejný „nafukovací princip" pro vyplnění množin T a $\Phi(T)$ jako na konci Kapitoly 2, viz (2.11).

Ještě než přikročíme k příkladům, vrátíme se na chvíli na začátek této kapitoly. Zavedli jsme tam polární souřadnice a protože poměrně často se s výhodou používají, vypočteme si jejich jakobián. Přechod k polárním souřadnicím reprezentuje zobrazení

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varrho \geq 0, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Jacobiho matice je pak

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\phi & \varrho\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Odtud jakobián

$$\Delta_\Phi = \det J_\Phi = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho.$$

3 Cvičení.

9

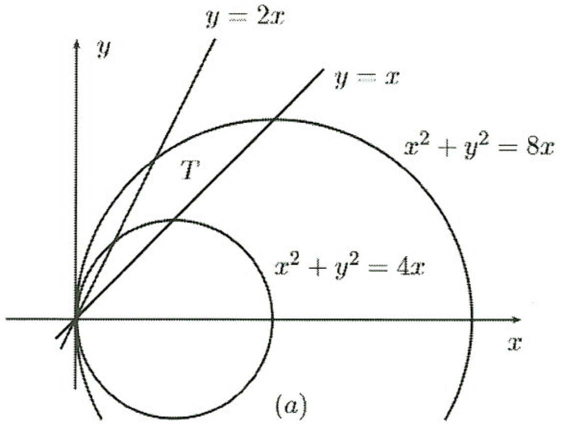
Úloha. Vypočtěte integrál

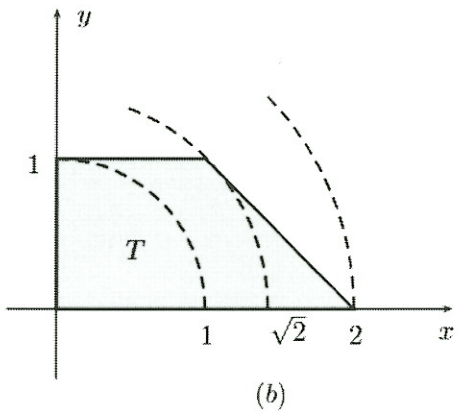
$$\iint_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

kde T je množina omezená křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$ a $y = 2x$.

Řešení. Množina T má tvar ukázaný na obr. 3.6(a).

a





Obr. 3.6.

Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$, pak integrovaná funkce bude mít tvar

$$f = \frac{1}{(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{1}{\varrho^4}.$$

Stejně tak rovnice křivek omezující množinu T budou mít v polárních souřadnicích vyjádření

$$\begin{aligned}
\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi &= 4\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \varrho = 4\cos\varphi\\
\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi &= 8\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \varrho = 8\cos\varphi\\
\varrho\sin\varphi &= \varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\varphi = 1\\
\varrho\sin\varphi &= 2\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\varphi = 2
\end{aligned}$$

Množina T je tak v polárních souřadnicích určena požadavky $\varphi \in \langle \operatorname{arctg} 1, \operatorname{arctg} 2\rangle = \langle \pi/4, \operatorname{arctg} 2\rangle$ a $\varrho \in \langle 4\cos\varphi, 8\cos\varphi\rangle$. Protože jakobián je ϱ, můžeme podle Věty 3.12 psát

$$\iint_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2}\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{1}{\varrho^4}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2\varrho^2}\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{3}{128\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{128}\,[\operatorname{tg}\varphi]_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{3}{128}.$$

Úloha. Vyjádřete integrál

$$\int_0^1\int_0^{2-y} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

v polárních souřadnicích při obou možnostech pořadí integrace.

Řešení. Nejprve musíme zjistit tvar oblasti T přes kterou se integrace provádí: z tvaru mezí u vnějšího a vnitřního integrálu vidíme, že

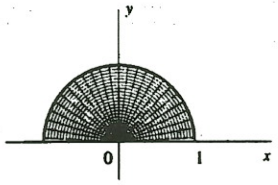
$$0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x \le 2 - y.$$

III.4. Substituční metoda pro dvojný integrál

10

Příklad 300. Rozhodněte, zda integrál $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x,y] \in E_2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení :



Funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je nespojitá na ose y (tj. $x = 0$). Nicméně, množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť $|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}| \le \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x,y] \in E_2$. Proto daný integrál existuje. Víme, že

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B(u,v)} f\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)\,|J|\,du\,dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le \pi \\ J = r & & \end{array}\right] = \int_0^\pi \Big(\int_0^1 \varphi \cdot r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

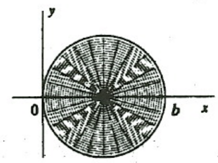
$$= \int_0^\pi \varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 r\,dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \qquad \blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

Příklad 301. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D = \{[x,y] \in E_2 : x^2+y^2-bx \le 0\},\ b > 0$

Řešení :

$$D : \Big(x - \frac{b}{2}\Big)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi & & x^2+y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ J = r & & -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{b\cos\varphi} r \cdot r\,dr\Big)\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}b^3 \cdot \frac{2}{3\cdot 1} \cdot 1 = \frac{4}{9}b^3. \qquad \blacksquare$$

Příklad 302. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D : x^2+y^2 \le a^2,\ x \le 0$

Řešení :

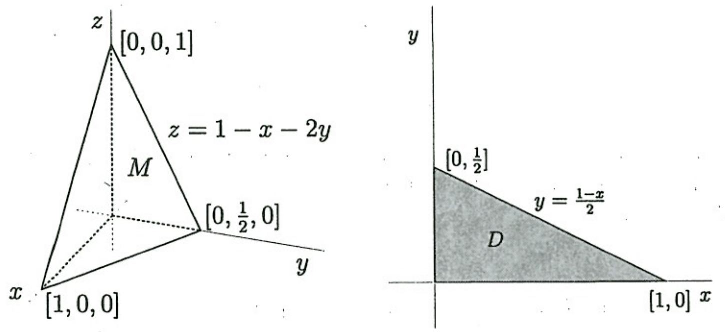
Příklad B. Vypočtěte $\int\limits_M (x^2+y^2)\,dxdy$, je-li M ohraničene přímkami $y=0$, $x+y=1$ a $y-x=1$ (viz obrázek 2.4 vpravo).

Řešení. Podle tvaru oboru integrace usoudíme, že bude výhodnější nejdříve integrovat podle x a pak podle y (tj. vniřní integrál podle x a vnější podle y). M je definováno nerovnostmi $0<y<1$ a $-1+y<x<1-y$. Podle Fubiniovy věty pak máme

$$\int\limits_M (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)\,dx\Big)\,dy = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^3}{3}+y^2x\Big]_{y-1}^{1-y} dy = \frac{1}{3}.$$

Šlo by také postupovat tak, že bychom množinu M rozdělili na dva trojúhelníky (jeden vpravo od osy y a druhý vlevo) a hledaný integrál bychom dostali jako součet integrálů přes tyto trojúhelníky. A integrály přes trojúhelníky už můžeme počítat i tak, že nejdřív integrujeme podle y. Proveďte za cvičení a porovnejte oba postupy.

Příklad C. Vypočtěte $\int_M x\,dxdydz$, kde M je čtyřstěn, omezený souřadnicovými rovinami a rovinou $x+2y+z=1$ (viz obrázek 2.5 vlevo).



Obr. 2.5

Řešení. Průmětem čtyřstěnu do roviny $z=0$ je trojúhelník D, omezený osami x a y a přímkou $x+2y=1$ (viz obrázek 2.5 vpravo). Podle

Fubiniovy věty je

$$\int\limits_M x\,dxdydz = \int\limits_D x\Big(\int\limits_0^{1-x-2y} dz\Big)\,dxdy = \int\limits_D x(1-x-2y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{(1-x)/2} (1-x-2y)\,dy = \int\limits_0^1 x\Big[y-xy-y^2\Big]_0^{(1-x)/2} dx = \frac{1}{48}.$$

Příklad D. Vypočtěte plošný obsah $\mu(D)$ části D roviny, omezené hyperbolami $xy=a$, $xy=b$, $0<a<b$ a parabolami $y^2=mx$, $y^2=nx$, $0<m<n$.

Řešení. Zvolme transformaci souřadnic ψ danou rovnicemi $xy=u$, $y^2/x=v$, kde u,v jsou kladná. Zobrazení je prosté, neboť je $x=\sqrt[3]{u^2/v}$, $y=\sqrt[3]{uv}$, nový obor integrace je obdélník $a<u<b$, $m<v<n$. Pro Jacobiho determinant dostáváme

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v},$$

a je proto

$$\mu(D) = \int\limits_D dxdy = \frac{1}{3}\int\limits_{\psi^{-1}(D)} \frac{dudv}{v} = \frac{1}{3}\int\limits_a^b du \int\limits_m^n \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}(b-a)\ln(\frac{n}{m}).$$

Příklad E. Vypočtěte plošný obsah parabolické úseče D, ohraničené parabolou $(x/a+y/b)^2 = x/a - y/b$ a osou x, kde a,b jsou daná kladná čísla.

Řešení. Zvolíme transformaci souřadnic ψ danou rovnicemi $u=x/a+y/b$, $v=x/a-y/b$, neboli $x=a(u+v)/2$, $y=b(u-v)/2$. V nových souřadnicích má parabola rovnici $v=u^2$, osa x se zobrazí na přímku $u=v$, Jakobián transformace je roven $J=-ab/2$, a proto máme

$$\mu(D) = \frac{ab}{2}\int\limits_0^1 du \int\limits_{u^2}^u dv = \frac{1}{12}ab.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{uv}}{v^2} \\ \frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}\,.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \dfrac{1}{2v}$ dostaneme

$$\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}A = \int_1^3\int_1^2 \frac{1}{2}\frac{u^2}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{13\ln 2}{2}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x(u,v),y(u,v))}\,.$$

Pro $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ je tedy

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}\,.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u,v),y(u,v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u,v) = \frac{1}{2v}\,.$$

Příklad 1.23. *Vypočítejme dvojný integrál*

12

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y \le 2x\right\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y^2 \le 2x,$$

tj.

$$2 \le xy \le 3 \wedge 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2. \tag{3}$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \dfrac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \le u \le 3 \quad \wedge 1 \le v \le 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\dfrac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

12.

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} \,.$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\dfrac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u,v), y(u,v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u,v) = \frac{1}{3v} \,.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \dfrac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}A = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3}\frac{u}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{5\ln 2}{6}.$$

Příklad 1.24. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

(4) $$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \text{a } J = r.$$

V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1,2\rangle \times \langle \pi/4, \pi/3\rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{array}{cc} 1 \le x^2+y^2 \le 4, & x \le y \le \sqrt{3}x, \\ 1 \le r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \le 4, & r\cos\phi \le r\sin\phi \le \sqrt{3}r\cos\phi, \\ 1 \le r \le 2, & 1 \le \operatorname{tg}\phi \le \sqrt{3}, \\ & \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{3}. \end{array}$$

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_N \sqrt{r^2}r\,\mathrm{d}A^* = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3}\,\mathrm{d}\phi = \frac{7}{36}\pi \,. \end{aligned}$$

Příklad 1.25. *Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami* $x^2+y^2 = x+y$, $z = x+y$ *a* $z = 0$.

13

$$\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dA$$

$$1 \le x^2+y^2 \le e, \quad y \ge 0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

$1 \le r^2 \le e$

$r \ge 0$

$r\sin\alpha \ge 0$

$\sin\alpha \ge 0 \qquad \alpha \in [0, \pi]$

$$\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln r^2}{r^2}\cdot r \; dr\, d\alpha = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}\ln^2 r^2\right]_1^{\sqrt{e}} d\alpha =$$

$\alpha \quad r$

$$\int \frac{\ln r^2}{r^2}\cdot r\; dr = \int \frac{1}{2}\,\frac{\ln t}{t}\, dt = \int \frac{1}{2} z\, dz$$

$t = r^2 \qquad z = \ln t \qquad = \frac{1}{4} z^2$

$dt = 2r\,dr \qquad dz = \frac{1}{t}\,dt$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\, d\alpha = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

(14)

$$\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

$$\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$$

$$\left[\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \alpha &\in [-\pi, \pi] \\ r &\in [\pi, 2\pi] \end{aligned}$$

$$\underset{\alpha}{\int_{-\pi}^{\pi}} \underset{r}{\int_{\pi}^{2\pi}} \sin\sqrt{r^2} \cdot r \, dr\, d\alpha =$$

$$\int \underset{u}{t} \underset{v'}{\sin t} = -t\cos t + \int \cos t = -t\cos t + \sin t$$

$$u' = 1 \qquad v = -\cos t$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big[-r\cos r + \sin r \Big]_{\pi}^{2\pi} d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} -2\pi + (-\pi)\, d\alpha =$$

$$= -3\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha = \underline{\underline{-6\pi^2}}$$

Teď integrujeme danou funkci.

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} 2e^{x/y}\,dy\,dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{a/y}\,dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy.$$

Toto je mnohem snažší, potřebujeme najít $\int e^{x/a}\,dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1\int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{c} w = \frac{x}{y} \\ dw = \frac{1}{y}\,dx \\ dx = y\,dw \\ x = y \mapsto w = 1 \\ x = y^2 \mapsto w = y \end{array}\right| = \int_0^1\int_y^1 2e^{w}y\,dw\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big[2y\,e^{w}\Big]_{w=y}^{w=1} dy = \int_0^1 2e\,y - 2y\,e^{y}\,dy = e\int_0^1 2y\,dy - \int_0^1 2y\,e^{y}\,dy$$

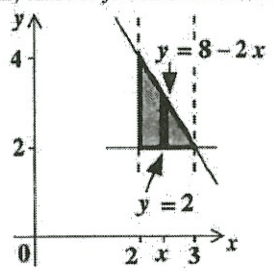
$$= e\Big[y^2\Big]_0^1 - \Big[2y\,e^{y}\Big]_0^1 + \int_0^1 2\,e^{y}\,dy = e - 2e + \Big[2\,e^{y}\Big]_0^1 = e - 2.$$

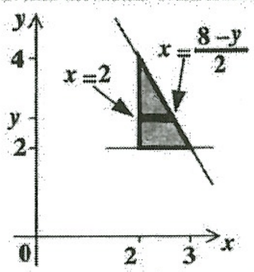
Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)}\iint_\Omega 2e^{x/y}\,dA = 6e - 12.$$

3a

6. Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y, která nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x, takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.



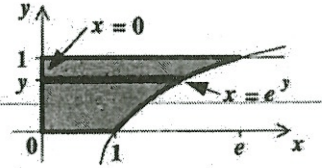


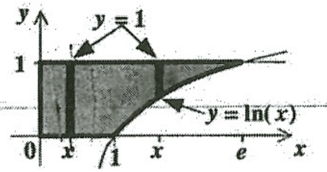
Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodorovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4\int_2^{(8-y)/2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

3b

7. Začneme určením oblasti integrace Ω. Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnižší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Teď jsme připraveni to nakreslit.



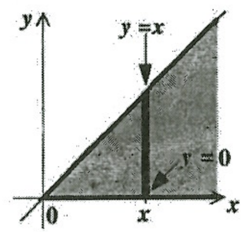


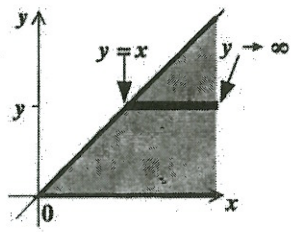
Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e\int_{\ln(x)}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

3c

8. Nejprve určíme oblast integrace Ω. Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.





Změna pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řezům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω, musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $\langle 0,\infty)$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

$$\int_0^\infty\int_y^\infty f(x,y)\,dx\,dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,

Bonusové cvičení 28.4.

http://www.web.natur.cuni.cz/~kunck6am/
kristyna.m.kuncova@natur.cuni.cz

Hinty

Příklady

1. Změňte pořadí integrace

(a)
$$\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(c)
$$\int_0^\infty \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

4

2. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

(a) i. Ano
$$\int_{-4}^e \int_1^3 \int_0^2 xyz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ii. Ano
$$\int_0^2 \int_1^3 \int_{-4}^e xyz^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

iii. Ano
$$\int_1^3 \int_0^2 \int_{-4}^e xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

(b) i. Ano
$$\int_0^3 \int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ii. Ne
$$\int_0^3 \int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \frac{x}{z}\cos y\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

iii. Ne
$$\int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \int_0^3 \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

iv. Ne
$$\int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \int_0^3 \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(c) i. Ano
$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$$

ii. Ano
$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\alpha$$

iii. Ano
$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \int_0^1 \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$$

iv. Ne
$$\int_0^1 \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

3. Zapište následující množiny nerovnicí a polárními souřadnicemi

(volíme kladné u, v), proto vzor množiny Ω při uvedené transformaci bude obdélník $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$. Nyní už stačí dosadit a vypočítat

$$\iint_\Omega \frac{1}{y\sqrt{x}}\,dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{1}{2},1\rangle} \frac{1}{\frac{u}{v}\sqrt{uv}}\cdot\frac{2u}{v}\,dudv =$$

$$= 2\iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{1}{2},1\rangle} \frac{dudv}{\sqrt{uv}} = 2\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 8\left[\sqrt{u}\right]_1^3\cdot\left[\sqrt{v}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 8\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)\,.$$

V dalších příkladech budeme užívat větu o substituci pro polární souřadnice

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\,.$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -r\sin t & r\cos t\end{pmatrix}\right| = \left|r\cos^2 t + r\sin^2 t\right| = r\,,$$

dostaneme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t, r\sin t)\cdot r\,du\,dv\,. \qquad (*)$$

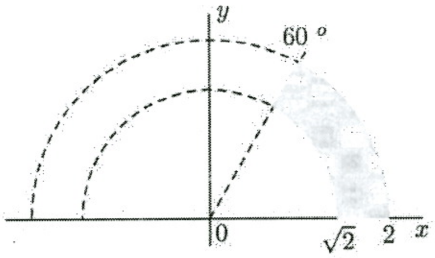
Příklad 8.6:

5

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle\sqrt{2},2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy = \iint_{\langle\sqrt{2},2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{3}\rangle} r\,\frac{\sin t}{\cos t}\,drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^2 r\,dr}_{=1}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}\,dt}_{=\ln 2} = \ln 2\,.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_{\sqrt{2}}^2 r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^2 = 2-1 = 1\,,$$

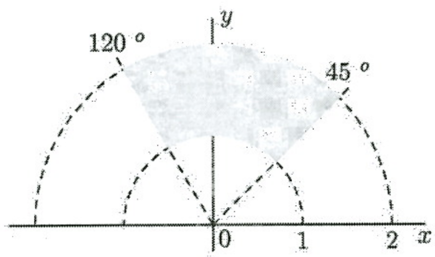
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{dw}{w} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dw}{w} = \left[\ln|w|\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2\,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\,dt\,,\quad 0 \rightsquigarrow 1\;$ a $\;\frac{\pi}{3}\rightsquigarrow\frac{1}{2}$.

Příklad 8.7:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x^2y\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



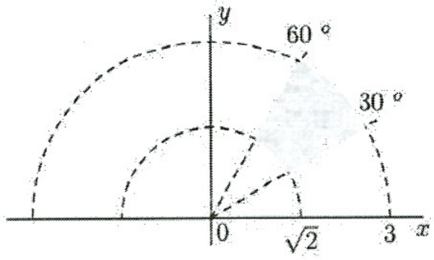
řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega x^2y\,dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle} r^4\,\sin t\cos^2 t\,drdt = \underbrace{\int_1^2 r^4\,dr}_{=\frac{31}{5}}\cdot\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin t\cos^2 t\,dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{31}{120}\left(2\sqrt{2}+1\right)\,.$$

Příklad 8.10:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle\sqrt{2},3\rangle \times \langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\,dxdy = \iint_{\langle\sqrt{2},3\rangle\times\langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\rangle} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{3} 1\,dr}_{=3-\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt}_{=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(3-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{w^2} = \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)\,,$$

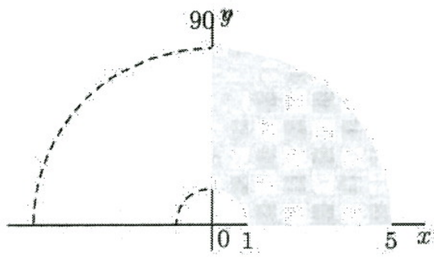
užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t\,dt\,,\quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

5

Příklad 8.11:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,5\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\,dxdy = \iint_{\langle 1,5\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t}\,r\,drdt = \underbrace{\int_1^5 1\,dr}_{=4} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt}_{=\frac{\pi}{4}} = \pi\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

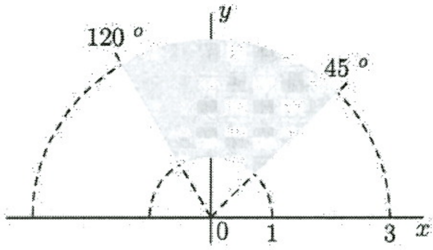
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+w^2}\,dw = [\operatorname{arctg} w]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $dw = \cos t\,dt\,,\quad 0 \rightsquigarrow 0$ a $\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1$.

Příklad 8.12:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega xy\,dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle} r^3 \sin t\cos t\,drdt = \underbrace{\int_1^3 r^3\,dr}_{=\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3=20} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t\cos t\,dt}_{=\frac{1}{8}} = \frac{5}{2}\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(3\sqrt{3} - 1),$$

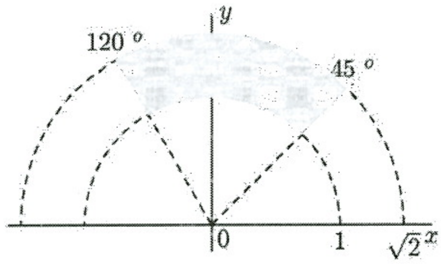
užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $dw = \cos t \, dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5

Příklad 8.15:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x^2 y \, dxdy ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, \sqrt{2} \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega x^2 y \, dxdy = \iint_{\langle 1,\sqrt{2}\rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\rangle} r^4 \sin t \cos^2 t \, drdt = \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, dr}_{=\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1)} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{120}(15 + 2\sqrt{2}).$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w^2 \, dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24}\left(2\sqrt{2} + 1\right),$$

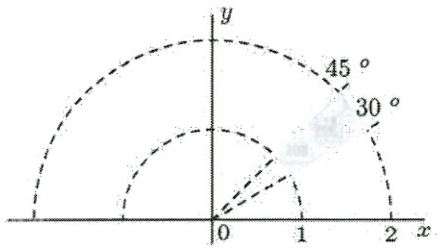
užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t \, dt$, $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

5

Příklad 8.16:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^2 y} \, dxdy ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega xy \, dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\rangle} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin t \cos^2 t} \, drdt = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{r^2} \, dr}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t)\cos^2 t}}_{=\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-1).$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t)\cos^2 t} dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{(1 - w^2)w^2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{2}{w^2} + \frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1}\right) dw =$$

$$= \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+w}{1-w}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2}),$$