11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Diferencovatelné zobrazení)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $x \in G$. Matice lineárního zobrazení $\varphi'(t)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení φ v bodě t. Je to tedy matice

$$\Big(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)\Big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojité všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n.

Je-li $m = n$, pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t.

Věta 2 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Postup výpočtu $\int_M f(x)\mathrm{d}x$

1. volba substituce
2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
3. výpočet J_φ
4. určení $\phi^{-1}(M)$
5. výpočet integrálu $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$

Hinty - neobvyklé substituce

1. $x = r\cos^2\alpha$, $y = r\sin^2\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \in (0, \infty)$
2. $u = xy$, $v = y/x$

Příklady

1. $\displaystyle\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < x\}$
2. $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

3. $\int_M x \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

4. $\int_M x^2 y^2 \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$

5. $\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x, x \leq x^2 + y^2 \leq 3x\} \setminus (0,0)$

6. Spočti míru množiny $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, (x+y)^4 < ax^2 y, x > 0\}$, $a > 0$

7. $\int_M \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$

8. Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$,

9. $\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde M je ohraničena křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$, $y = 2x$.

10. $\int_M \arctan \frac{y}{x} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

11. míru M, kde M je ohraničena křivkami $xy = a$, $xy = b$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < a < b$ a $0 < m < n$.

12. $\int_M \frac{y^3}{x^3} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$

13. $\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2, y \geq 0\}$

14. $\int_M \sin \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$

15. Změňte pořadí integrace

    (a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x,y) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

16. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

(a) i. $\displaystyle\int_{-4}^{e}\int_{1}^{3}\int_{0}^{2} xyz^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ iii. $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-4}^{e} xyz^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}\int_{-4}^{e} xyz^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

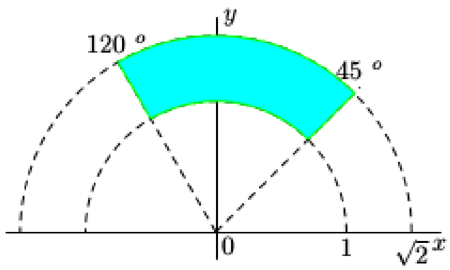
(b) i. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ iii. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2} \frac{x}{z}\cos y\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ iv. $\displaystyle\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

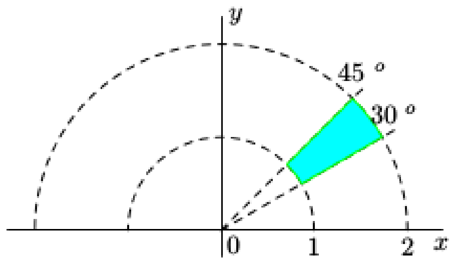
(c) i. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$ iii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{0}^{1} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$

ii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\alpha$ iv. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

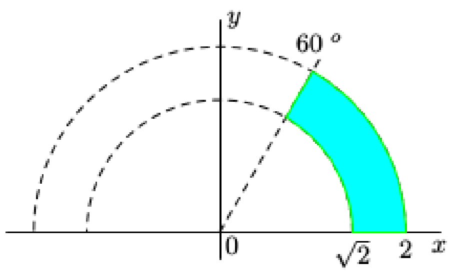
(d) Zapište následující množiny polárními souřadnicemi



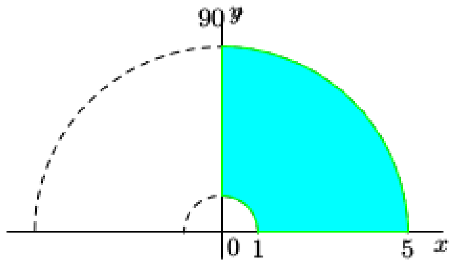
(a)



(b)



(a)



(b)