$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx$$ $\boxed{\text{Fubinka}}$

- $a, b > 0$, $b < a$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x}\right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2} \cdot \frac{x}{x}\, dy\, dx$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2}\, dx\, dy = \int_b^a \frac{1}{y}\left[\operatorname{arctg} yx\right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^a \frac{1}{y} \cdot \frac{\pi}{2}\, dy = \frac{\pi}{2}\left[\ln y\right]_b^a = \underline{\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}}$$

- $a, b > 0$, $a < b$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\operatorname{arctg} yx}{x}\right]_a^b dx = -\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+y^2x^2}\, dy\, dx =$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{y} \frac{\pi}{2}\, dy = -\frac{\pi}{2}\left(\ln b - \ln a\right) = \underline{-\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}}$$

- $a, b < 0$ $\quad b < a$

$$I(a,b) = \dots = \int_b^a \frac{1}{y}\left[\operatorname{arctg} yx\right]_0^\infty dy = \int_b^a \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \underline{-\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}}$$

- $a, b < 0$ $\quad a < b$

$$I(a,b) = \dots = -\int_a^b \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) dy = \underline{\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}}$$

- $a = b$ $\quad I(a,b) = 0$

- $a \leq 0 \quad b > 0$
- $a > 0 \quad b \leq 0$

$\left.\right\}$ $\int$ divergují

neb

- $a \leq 0 < b$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_a^b dx = -\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+y^2x^2} \, dy \, dx =$$

$$= -\int_a^0 \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2} \, dx \, dy + -\int_0^b \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2x^2} \, dx \, dy$$

$$= -\int_a^0 \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy - \int_0^b \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy$$

$$= -\int_a^0 -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y} \, dy - \int_0^b \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y} \, dy =$$

$$= -\int_a^b \frac{\pi}{2} \frac{1}{|y|} \, dy = \underline{\underline{-\infty}}$$

- $b \leq 0 < a$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_b^a = \int_b^0 \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy + \int_0^a \frac{1}{y} \left[\operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^0 -\frac{1}{y} \frac{\pi}{2} \, dy + \int_0^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{y} \, dy = \int_b^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{|y|} \, dy = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx}}{x} \right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx}}{x} \right) dy\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -e^{-yx}\, dy\, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -e^{-yx}\, dx\, dy$$

$$= \int_b^a \left[\frac{e^{-yx}}{y} \right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{y}\, dy = +\ln b - \ln a$$

$$= \ln \frac{b}{a}$$

$b, a > 0$, $b = a = 0$ $\int = 0$, jinak div.

Předpoklady: $(0,\infty) \times (b,a)$ - měřitelné

$$- \int_0^\infty \underbrace{\int_b^a e^{-yx}}_{\text{nezáp. fce}}\, dy\, dx$$

$a < b$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_0^\infty \left[- \frac{e^{-yx}}{x} \right]_a^b dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_a^b -\frac{1}{x}\, e^{-yx}(-x)\, dy\, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_a^b \int_0^\infty e^{-yx}\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \left[- \frac{e^{-yx}}{y} \right]_0^\infty dy = \int_a^b + \frac{1}{y}\, dy = \left[+ \ln y \right]_a^b =$$

$$= + \ln b - \ln a = \underline{\underline{\ln \frac{b}{a}}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx \qquad 2$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} \right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2} \cdot 2y \; dy \; dx$$

$$= \int_b^a \int_0^\infty \frac{2y}{1+y^2x^2} \, dx \, dy = \int_b^a \left[\frac{2 \cdot \arctan yx}{\cancel{y}} \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^a \pi \cdot 1 \, dy = \pi \left[y \right]_b^a = \underline{\underline{\pi(a-b)}}$$

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-0x^2}-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}\right]_a^0 dx = \int_0^\infty \int_a^0 -x\,\frac{e^{-yx^2}}{e^{x^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^0 \int_0^\infty -x\,e^{x^2(-1-y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^0 \left[\frac{e^{x^2(-1-y)}}{+2(1+y)}\right]_0^\infty dy = \int_a^0 \frac{-1}{2(1+y)}\,dy$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\ln(1+y)\right]_a^0 = \underline{\underline{+\frac{1}{2}\ln(1+a)}}$$

$$\frac{e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} \sim e^{(-a-1)x^2} = e^{-(a+1)x^2}$$

u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

$\boxed{5{,}70.}$ Dokažte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz = \frac{4}{5}\pi abc\,,$$

b/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \;;\; x^2 + y^2 \leqq 2az,\; x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_M (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right),$$

c/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \;;\; y^2 + z^2 \leqq x^2,\; x \geqq 0,\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2\right\}$

$$\iiint_M (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi R^5}{5}\left(2 - \sqrt{2}\right),$$

d/ M je omezena $(x^2+y^2+z^2)^2 = ax^2y$, $z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{a^4}{144}$,

$\overset{*}{e}$/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3 \;.\; x \geqq 0,\; y \geqq 1,\; z \geqq 1,\; xyz \leqq 1\right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz}\cdot x^2y\,dx\,dy\,dz = \frac{e}{2} - 1$$

[Zaveďte substituci $x = u$, $y = \frac{u+v}{u}$, $z = \frac{u+v+w}{u+v}$],

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z\,dx\,dy\,dz = \frac{13}{4}\pi$.

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$. 4

(viz též př. 6,44 .)

[Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leqq 0$, $b > 0$ anebo pro $a > 0$, $b \leqq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0$, $b > 0$, nechť např. je $b < a$.

Uvažujme následující integrál I,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy\,,\ \text{kde } M = \left\{[x,y] \in E_2 \;;\; x \in (0,+\infty)\;\; y \in (b,a)\right\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M , tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}_M^{\mathcal{R}}$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) \;,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=o}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \;.$$

Odtud vyplývá, že

$$I\,(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \;.$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy \;.$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$. 5

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^y}{\log x}\right) dy = \int_a^b x^y\, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y\, dx\, dy , \quad M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b)\right\}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\, dx = \iint_M x^y dx\, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx\right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} .$$

5,73. **Poznámka:**

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \log 2 \ (b = 1 , \quad a = 0) ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x}\, dx = \log \tfrac{3}{2} \ (b = \tfrac{1}{2} , \quad a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro } 0 < b \leqq a .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $$\frac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R \quad \text{pro } M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \right.$$

$$\left. x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), \ y \in (0,1) \right\} ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2 \sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad \text{pro } |A| > |B| .$$

B/ Použijte též vztahu

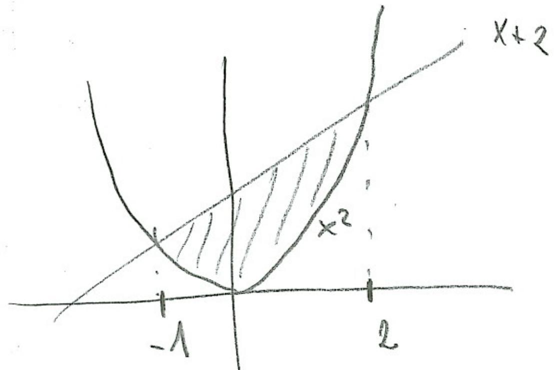
(6)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_{b=y}^{a=y} = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-yx^2}}{x} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -xe^{-yx^2} dy\, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -xe^{-yx^2} dx\, dy =$$

$$= \int_b^a \left[\frac{1}{2y} e^{-yx^2} \right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y} dy = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}}}$$

(2a) $M \subset \mathbb{R}^2$; $x^2 < y \le x+2$



$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^{2} x+2-x^2\,dx$$

$$= \left[\,2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\,\right]_{-1}^{2} = 4+2-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

$0 \le x \le 1 \quad , \quad |y| \le x, \quad 0 \le z \le xy^2$

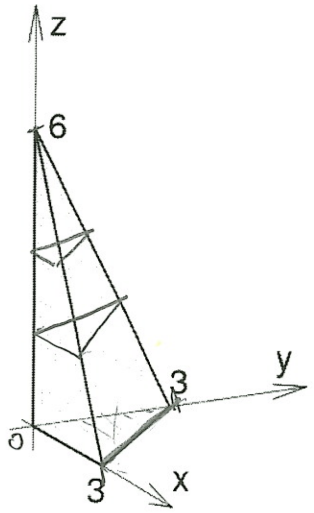
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} \int_0^{xy^2} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \left[z \right]_0^{xy^2} dy \, dx =$$

$x \quad y \quad z$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^{x} xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} \, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3 \cdot 5}}}$$

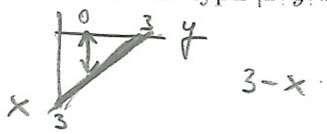
d) M je ohranicena plochami $2x+2y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.



Rovina $2x+2y+z=6$ protina souřadné osy v bodech o souřadnicich $x=3$, $y=3$, $z=6$. Prumět množiny M do roviny je trojuhelnik o vrcholech $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$. Plati tedy

$$(x,y,z)\in M \Rightarrow \begin{cases} 0\le x\le 3 \\ 0\le y\le 3-x \\ 0\le z\le 6-2x-2y \end{cases}$$

M je v tomto připadě čtyřstěn a jedna se o elementarni oblast typu $[x,y,z]$.



2.6 Integraly na měřitelnych množinach

V teto kapitole rozšiřime pojem n-rozměrneho integralu na měřitelne množiny:

Definice 2.5 *Rekneme, ze funkce $f: M\to\mathbb{R}$, $M\subset\mathbb{R}^n$ je integrovatelna na mnozine M, tj. ze existuje integral (Riemannuv) z funkce f na mnozine M, existuje-li interval $I\subset\mathbb{R}^n$ tak, ze $M\subset I$ a funkce $f\cdot\chi_M$ je na I integrovatelna.*
Potom klademe

$$\int_M f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\int_I (f\cdot\chi_M)(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$$

V nasledujicich uvahach se omezime na $n=2,3$.
Postačujici podminku pro existenci integralu udava nasledujici věta:

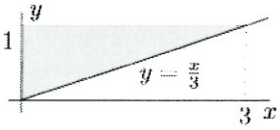
Věta 2.5 *Je-li $M\subset\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ meritelna mnozina a $f: M\to\mathbb{R}$ je na M ohranicena a skoro vsude spojita, pak je f na M integrovatelna.*

(Připomeňme, že nějake tvrzeni plati na množině M skoro všude, jestliže plati $\forall x\in M\setminus A\subset\mathbb{R}^k$ a neplati $\forall x\in A$, kde $\nu_k(A)=0$ (tj. plati s vyjimkou množiny nulove miry).)
Fubiniova věta pro vypočet integralu se da snadno rozšiřit na elementarni oblasti:

Věta 2.6 *Necht*

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ a\le x\le b, d(x)\le y\le h(x)\},\quad resp.$$
$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ a\le x\le b, d_1(x)\le y\le h_1(x), d_2(x,y)\le z\le h_2(x,y)\},$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{3y} \big(\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}_{=x^2+y^2}\big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{3y} (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x:=0}^{x:=3y}=12y^3} \Big)\,dy = \int_0^1 12y^3\,dy = 12\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 3$$

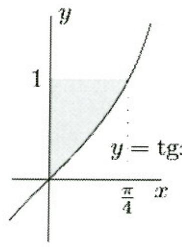
nebo jinak

$$V(\Omega) = \int_0^3 \Big(\underbrace{\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2+y^2)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{3}}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3} \Big)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3\Big)\,dx = \left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{81}x^4\right]_0^3 = 3\,.$$

Příklad 9.8:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \operatorname{arctg} y, 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{\operatorname{arctg} y} \big(\underbrace{\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1\,dz}_{=\frac{6x}{1+y^2}}\big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+y^2} \underbrace{\int_0^{\operatorname{arctg} y} 6x\,dx}_{=[3x^2]_{x:=0}^{x:=\operatorname{arctg} y}=3\operatorname{arctg}^2 y} \Big)\,dy = 3\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{1+y^2}\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2}\cdot(1+y^2)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64};$$

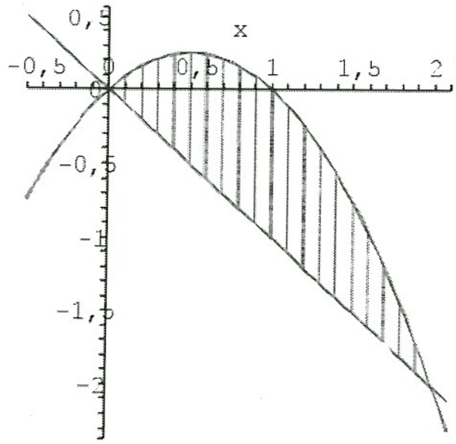
použili jsme substituci $t := \operatorname{arctg} y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2}\,dy$ tedy $dy = (1+y^2)\,dt$, 0 0 a 1 $\frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\mathrm{tg}\,x}^1 \frac{6x}{1+y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\,[\operatorname{arctg} y]_{y:=\mathrm{tg}\,x}^{y:=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\,dx = \left[\frac{3}{4}\pi x^2 - 2x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64};$$

neboť Ω lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ a $\mathrm{tg}\,x \le y \le 1$.

Příklad 9.9:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \ln y, 0 \le z \le \frac{6x}{y}\right\}.$$



Obr. 1

Řešení: M je ohraničená přímkou $y = -x$ a parabolou $y = x - x^2$ (Obr. 1).

Souřadnice průsečíků obou křivek získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} y &= -x, \\ y &= x - x^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že křivky se protnou v bodech $(0, 0)$ a $(2, -2)$. Funkce $f(x, y) = xy$ je na M spojitá a je zřejmé, že pro libovolné $x \in \langle 0, 2\rangle$ je $-x \leq y \leq x - x^2$. Užitím Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int\limits_M xy \,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^2 \int\limits_{-x}^{x-x^2} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=-x}^{y=x-x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (x(x-x^2)^2 - x^3) \,\mathrm{d}x = -\frac{16}{15}\,. \end{aligned}$$

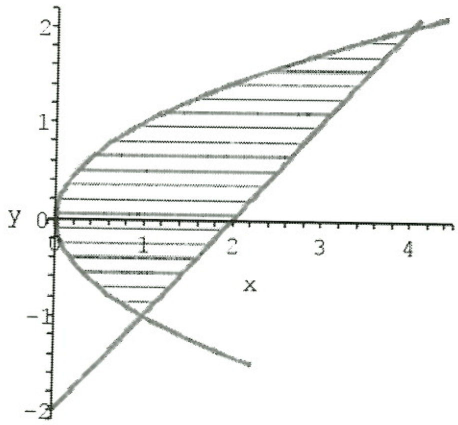
Příklad 1.9. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a $x = 3$.

Řešení: Množina M je část roviny ohraničená přímkami $y = x$, $x = 3$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ (Obr. 2).

Vyšetřením průsečíků křivek, které tvoří hranici množiny a také z obrázku je zřejmé, že pro všechny body (x, y) množiny je $x \in \langle 1, 3\rangle$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$. Protože



Obr. 3

$$\int\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}A = \int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{y^2}^{y+2} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{2}\left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=y^2}^{x=y+2}\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2}\frac{1}{3}y\left((y+2)^3 - y^6\right)\,\mathrm{d}y = \frac{603}{40}\,.$$

Příklad 1.11. *Vypočítejme dvojný integrál*

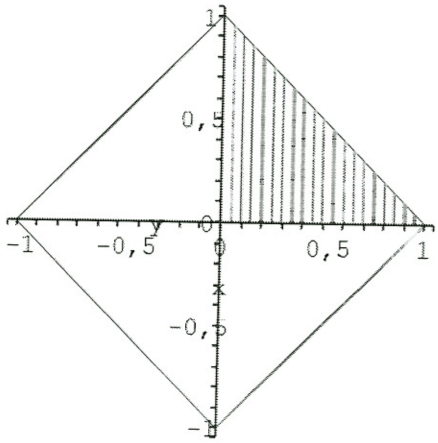
$$\int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkou $x + y = 1$.

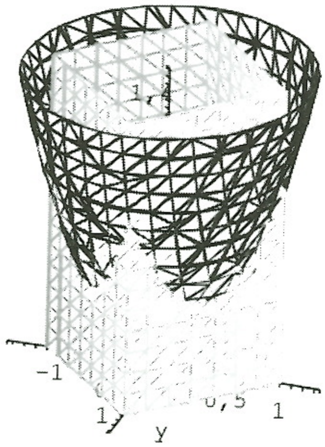
Řešení: Hraniční křivkou množiny M je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ a $(0,-1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ je na množině M spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}A$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce f je na M spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : (x,y) \in M \wedge 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou z), je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny M ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto



Obr. 4



Obr. 5

vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 \left|yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x =$$

$$= 4\int\limits_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Příklad 1.12. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge x+y\leq 3\}$. ***Výsledek:*** 27/2

Příklad 1.13. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1 \wedge y\leq x\leq 10y\}$. ***Výsledek:*** 6

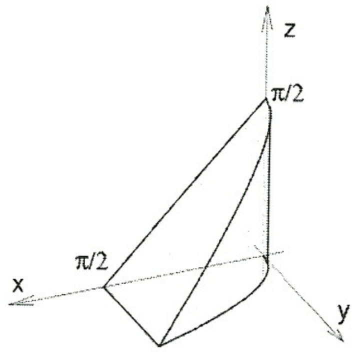
Příklad 1.14. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y^2=2x$ *a* $y=2x$.

Výsledek: $\ln(5/4)$

c) $\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde* M *je ohraničena plochami* $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.



Množina M je shora ohraničena rovinou $x+z=\frac{\pi}{2}$, dále souřadnými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y=\sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny xy je shora ohraničen grafem funkce $y=\sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}[y\sin(z+x)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

Cvičení

V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

Příklad 8 $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* B *je množina ohraničená přímkami* $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$. [3]

Příklad 9 $\iint\limits_B (2x+3y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* B *je množina ohraničená parabolou* $y^2=2x$ *a její tětivou jdoucí body* $A=(2,-2)$, $B=(8,4)$. [$187\frac{1}{5}$]

Příklad 10 $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2, y\leq 4-x^2\}$ [$\frac{16}{3}\sqrt{2}$]

Příklad 11 $\iint\limits_B xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* B *je množina ohraničená parabolou* $y^2=2px$ *a přímkou* $x=\frac{p}{2}$. [$\frac{p^5}{21}$]

Příklad 12 $\iiint\limits_B xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde* B *je množina ohraničená plochami* $z=xy$, $x+y=1$ *a* $z=0$. [$\frac{1}{180}$]

Příklad 13 $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde* B *je množina ohraničená plochami* $z=xy$, $y=\sqrt{x}$ *a rovinami* $x+y=2$, $y=0$, $z=0$. [$\frac{3}{8}$]

Příklad 14 $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde* B *je množina ohraničená plochami* $z=1-4x^2-y^2$ *a* $z=0$. [$\frac{\pi}{4}$]

Příklad 15 $\iiint\limits_B xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde* B *je množina ohraničená plochami* $x=1$, $y=x$, $z=y$ *a souřadnými rovinami.* [$\frac{1}{48}$]

Příklad 1.91. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W x^2 z\, e^{x-y+z^2}\, dV,$$

kde $W = \langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. ***Výsledek:*** $(e^2-5)(e^2-1)(e-1)/(2e)$

Příklad 1.92. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x+y+z \leq 1\}$.

Řešení: Množina W je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník M (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Zřejmě $\forall (x, y) \in M$ je $0 \leq z \leq 1-x-y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_M \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, dz \right) dA.$$

Zapíšeme-li množinu M ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1-x\},$$

můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 [2\ln(1+x+y) - y]_{y=0}^{y=1-x}\, dx = \int_0^1 (2\ln 2 - 2\ln(x+1) + x - 1)\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:

Pro libovolné $z \in \langle 0, 1\rangle$ leží vždy bod (x, y) v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny xy $(z=0)$ je trojúhelník M_z s vrcholy $(0, 0)$, $(1-z, 0)$, $(0, 1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, dV = \int_0^1 \left(\int_{M_z} \frac{1}{1+x+y}\, dA \right) dz.$$