

## 10. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Teorie

**Věta 1** (Fubiniova). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou úplné a  $\sigma$ -konečné. Bud'  $(\mathbb{R}, \rho)$  součin měr  $\mu$  a  $\nu$  a  $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$  jejich úplný součin. Nechť  $f$  je  $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na  $\overline{\rho}$ -měřitelné množině  $M \subset X \times Y$ . Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

*má smysl. Potom pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  má smysl integrál*

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

*funkce  $g$  má integrál*

$$\int_X g d\mu$$

*a*

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

**Poznámka 2.** Speciálně lze Fubiniho větu použít, jestliže

- $M$  je otevřená (nebo uzavřená) a  $f$  je spojitá a **nezáporná** (nekladná) na  $M$ .
- $M$  je otevřená (nebo uzavřená) a **omezená** a  $f$  je spojitá a **omezená** na  $M$ .

### Příklady

1. Spočtete

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx & \text{(d)} \int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \\ \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2x^2) - \ln(1 + b^2x^2)}{x^2} dx & \text{(e)} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ \text{(c)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx & \text{(f)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \end{array}$$

2. Spočítejte míru množiny

(a)

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$$

(b)

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x, 0 \leq z \leq xy^2\}$$

(c)  $M$ , která je ohraničena plochami  $2x + 2y + z = 6$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ .

(d)

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \arctan y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{1+y^2}\}$$

3. Spočítejte integrál přes množinu

(a)  $\int_M xy dA$  kde  $M$  je ohraničena křivkami  $y = -x$  a  $y = x - x^2$ .

(b)  $\int_M x^2 + y^2 dA$  kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

(c)  $\int_M y \cos(x + z) dA$  kde  $M$  je ohraničena plochami  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = \frac{\pi}{2}$ .

(d)  $\int_M \frac{dA}{1+x+y}$  kde  $M = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

### Bonus

