(1) $$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$$

- pro $\alpha \geq 0$ $F(\alpha)$ konverguje (srovn. či LSK)
- pro $\alpha \in (0,\infty)$ $F(\alpha)$ splňuje

$$F''(\alpha) + F(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

(d) Dů

$$F'(\alpha) \overset{\text{deuk}}{=} \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}\, dx$$ odůvodnění - DÚ

$$F''(\alpha) \overset{\text{deuk}}{=} \int_0^\infty \frac{-x \cdot e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$$

pak $$F''(\alpha) + F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(x^2+1)}{x^2+1}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

(2) $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$

(a) $D_F = [0, \infty)$

(b) F je spojitá na $[0, \infty)$

(před 2 týdny)

(c) $\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = 0$

$f(x\alpha)$ je spoj v x i α $\to$ měřitelná

$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} = 0$

majoranta $\frac{1}{1+x^2}$

(d) F je nerostoucí

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}}_{<0}\, dx \leq 0 \qquad \text{na } (0, \infty)$$

e) F je konvexní

$$F''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx > 0 \qquad \text{na } (0, \infty)$$

(d) $\max F(\alpha) = F(0) = \frac{\pi}{2}$

$\inf_{\alpha \in [0,\infty)} F(\alpha) = 0$

minima nenabývá

Tedy $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$ pro $x \in \langle 0,+\infty)$.

e/ Ukažte, že je též splněna rovnice

$$F'(x) + 2F(x) = 0 \quad \text{a}$$

1/ vypočtěte z této diferenciální rovnice $F(x)$,

2/ řešte soustavu

$$2F(x) - F'(x) = 2e^{-2x} . \sqrt{\pi}$$

$$2F(x) + F'(x) = 0$$

jako soustavu dvou lineárních rovnic .

6,52. Posledním úkolem, kterým se budeme zabývat, je studium a nakreslení grafu funkce zadané integrálem, podrobněji - je dána funkce F , $F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx$, my máme nakreslit graf této funkce F .

Při řešení tohoto problému budeme postupovat takto:

1/ zjistíme maximální obor D_F ("definiční obor"), ve kterém je funkce F definována a konečná, tj. zjistíme množinu těch $\alpha \in E_1$, pro která konverguje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$,

tedy $$D_F = \{ \alpha \in E_1 ; \; f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M \} ,$$

2/ budeme zkoumat spojitost funkce F v množině D_F ,

3/ spočítáme limity funkce F v "krajních bodech" množiny D_F , přesněji - je-li např. $D_F = (a,b)$, spočítáme

$$\lim_{\alpha \to b_-} F(\alpha) , \quad \lim_{\alpha \to a_+} F(\alpha) ,$$

4/ budeme zkoumat monotonii F ,

5/ eventuelně pro podrobnější studium vyšetříme extrémy funkce F , resp. konkavitu a konvexitu.

6,53. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$!

1/ Zjistěte, že $D_F = \langle 0,+\infty)$.

2/ Ukažte, že F je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ (viz př. 6,3) .

3/ Ukažte, že $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$ (viz př. 4,21).

4/ Ukažte, že F je nerostoucí v $\langle 0,+\infty)$:

(4)

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$$

Heine, zvolme α_j

$$\lim_{j \to \infty} \int \geq \liminf_{j \to \infty} \int \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int \liminf$$

$$\geq \int_0^\infty \lim_{j \to \infty} x^{\alpha_j - 1} e^{-x} \, dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x} \, dx = \infty$$

konvergence u "0"

(5)

$$\lim_{\alpha \to 2+} \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\, dx$$

volíme $\alpha_j \xrightarrow{j\to\infty} 2+$

analogicky

$$\lim_{j\to\infty} \int \geq \liminf_{j\to\infty} \int \geq \int \liminf = \int \lim_{j\to\infty}$$

$$\int_0^\infty \lim_{j\to\infty} \frac{x}{2+x^{\alpha_j}}\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^2}\, dx = \infty$$

$\downarrow$

div u ∞ jako $\frac{1}{x}$

(6)

$$\lim_{\alpha \to 1-} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\ln(\alpha - \sin x)}\, dx$$

tip

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\ln(1-\sin x)}\, dx$$

"0": Srovnáme s x^{-1}

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\ln(1-\sin x)}}{\frac{1}{x}} = \lim \underbrace{\frac{-\sin x}{\ln(1-\sin x)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x}{-\sin x}}_{-1} = -1$$

tedy $\int_0^{\pi/4} \frac{-dx}{\ln(1-\sin x)}$ se chová jako $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{x}\, dx$ Diverguje

Zvolme $\alpha_j \to 1-$ a zkoumejme $\int_0^{\pi/4} \frac{-1}{\ln(\alpha - \sin x)}\, dx$

Fatou

$$\lim_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \liminf_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \int_0^{\pi/4} \liminf_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \lim_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{\ln(1-\sin x)}\, dx = -\infty$$

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \quad \text{pro } a > 0 \,,\ b,c \in E_1 \,.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

4

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro } a > 0 \,,\ b \geq 0 \,.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Symetrie

Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

5

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

[Majoranta $e^{-(p+1)x^2}$, $p \in (-1,\infty)$,

[a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1,+\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\ , \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro } a \in (-1,+\infty)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?),

k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0,+\infty)$, $A = \langle -1,0\rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2}-1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \ ]$$

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

[a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$

(majoranta - pro $a \in \langle p,q\rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ - určíme podle následujícího odhadu - proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál - př. 5,84 - dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi}\ ,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \quad \text{pro } b \geq 0\ ,\ a > 0\ .$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a)$ pro všechna $a,b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e .]

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot \log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot \log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot \log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b \in E_1,\ b \neq 0.$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot \cos bx - e^{-\alpha x}\cdot \cos\beta x}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b,\beta \in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \text{ a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0,\ \alpha > 0,\ b,\beta \in E_1.$$

6 !

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro} \quad a > 0\,, \quad b > 0\,.$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ||

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p \rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \,.\, |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)}\, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0\,,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20, byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20, dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0\,, \quad b \geq 0\,.$$

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$ ∥

7

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\,dx$.

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$\boxed{F(0,k) = 0 , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 .}$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = -e^{-kx} \cdot \sin ax .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} , \quad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a) ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.
Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^{\infty} -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\ ,$$ konvergentní majoranta je

$\boxed{G(x) = xe^{-px^2}}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)\ ,$$ protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

8.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}\ .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \boxed{\frac{1}{1-p}}\ ,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ ,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1\rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ‖

9.

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61 , dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x}$$ s konvergentní majorantou

$$G(x) = \frac{2}{1-p^2}$$ pro $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p\rangle \subset (-1,+1)$.

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy

$(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$ - viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27 , dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}dx = J(a)$$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$. ‖

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A\cos x)}{\cos x}dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π .

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1 , tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\rangle$.

255 35 Z12

10

6,19. Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = \langle 0, +\infty)$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

P
O

a/ pro každé $a \in \langle 0, +\infty)$ je $\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in \langle 0, +\infty)$ a každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ existuje

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x},$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a \in \langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

zřejmě $\mathcal{G}(x) = 1$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0, +\infty)$ a

P spočítat
O

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}\,dx, \quad a \in \langle 0, +\infty).$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}, \qquad a \in \langle 0, +\infty).$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C, pro niž $F(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+a) + C$, $a \in \langle 0, +\infty)$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C. Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0, +\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+0) + C,$$

tj. $C = 0$.

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 - stačilo položit $a = \sin A$.

11.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a" i „b" , omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\right| \leqq \left|\frac{2}{a}\right| \leqq \frac{2}{p} \in \mathcal{L}(0, \tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi . \log b$ vyplyne konečně

$$F(a,b) = \pi . \log \frac{a+b}{2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .

Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1 \rangle$) a odhadu

$$\log b^2\cos^2 x \leqq \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 .

spoj. fce

a/ zvolte libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0,+\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, potom ze vztahu

$$\frac{e^{-\alpha_1 x}}{1+x^2} \geqq \frac{e^{-\alpha_2 x}}{1+x^2} \qquad x \in (0,+\infty)$$

plyne i $F(\alpha_1) \geq F(\alpha_2)$ (ukažte, že dokonce $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$),

b/ $F'(a) < 0$ pro $a \in (0,+\infty)$, odtud plyne, že F je klesající v $\langle 0,+\infty)$.

5/ Ukažte, že F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$ (spočtěte F'' !)

6/ Ukažte, že

$$\max F(a) = F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{a \in \langle 0,+\infty)} F(a) = 0,$$

minima funkce F nenabývá.

*7/ Ukažte, že $F'_+(0) = -\infty$.

(Podle známé věty - vyslovte ji a odůvodněte - jest

$$F'_+(0) = \lim_{a \to 0_+} F'(a) \quad \text{a zjistíte, že}$$

$$\lim_{a \to 0_+} F'(a) = \int_0^\infty \lim_{a \to 0_+} \left(-\frac{xe^{-ax}}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\infty \quad).$$

Jednotlivé kroky si znovu podrobně proveďte! Nakreslete graf ! ||

6,54. Nakreslete graf funkce $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ /!

1/ $D_F = (-\infty, 0) \cup (0,+\infty)$, F je funkce sudá,

2/ F je spojitá v D_F,

3/ $\lim_{a \to 0_+} F(a) = +\infty$, $\lim_{a \to \infty} F(a) = 0$,

4/ F je klesající v intervalu $(0,+\infty)$

5/ F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$. ||

6,55. Nakreslete grafy funkcí

a/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\, dx$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$, 6,31. Spočtěte $I(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin kx \, dx$!

a/ Ukažte, že pro $a > 0$, $b > 0$, $k \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Zvolte $k \in E_1$, $b \in (0,+\infty)$ pevně, buď $a \in (0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b,k) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin kx \, dx = \frac{-k}{a^2+k^2} \quad \text{(viz př. 4,47)}$$

konvergentní majoranta $G(x) = e^{-px}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty) \subset (0,+\infty)$.

Odtud plyne, že

$$I(a,b,0) = 0 \quad \text{(přímo vidět)},$$

$$I(a,b,k) = \operatorname{arctg} \frac{b}{k} - \operatorname{arctg} \frac{a}{k} \quad \text{pro } k \neq 0,$$

neboť $I(b,b,k) = 0$.

c/ Výsledek srovnejte s příkladem 6,22, podle kterého jest

$$I(a,b,k) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin kx}{x} dx - \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin kx}{x} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{k}{a} - \operatorname{arctg} \frac{k}{b} \quad \text{pro } a > 0, \ b > 0, \ k \in E_1.$$

Není to ve sporu s předešlým výpočtem? Ukažte, že ne.

Pro $k = 0$ dostáváte v obou případech $I(a,b,0) = 0$.

Dále ukažte, že pro libovolné $z \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} z,$$

odkud již vyplyne, že pro libovolná $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z_1 - \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{z_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{z_2}.$$

6,32. Spočtěte $J(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos kx \, dx$!

Obdobně příkladu 6,31, obdržíte

$$J(a,b,k) = \frac{1}{2} \log \frac{b^2+k^2}{a^2+k^2} \quad \text{pro } k \in E_1, \ a > 0, \ b > 0.$$

6,33. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx$!

a/ Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in E_1$, $c \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \; b,c \in E_1 .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b \geq 0 .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.
Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a \to 0_+} K(a,b) = \lim_{a \to 0_+} \left[\frac{\pi}{b} \cdot \log(b + a) + C(b) \right] = \frac{\pi}{b} \cdot \log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2 + x^2} dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b} \log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|} \cdot \log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b \in E_1, \ b \neq 0 .$$ ‖

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot \cos bx - e^{-\alpha x} \cdot \cos \beta x}{x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b, \beta \in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \cos bx \, dx = -\frac{a}{a^2 + b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a \in \langle p, +\infty)$, kde $p > 0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2} \log \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2} \quad \text{pro } a > 0, \ \alpha > 0, \ b, \beta \in E_1 .$$ ‖

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a \in (0, +\infty)$. Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + a^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1 + p^2 x^2}$ pro $a \in \langle p, +\infty)$, kde $p > 0$).