(3)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$$

$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha)$ Heine

$$\lim_{\alpha_j \to \infty} F(\alpha_j) \geq \liminf_{j \to \infty} F(\alpha_j) \geq \int_0^\infty \liminf_{j \to \infty} e^{-\alpha_j x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lim_{j \to \infty} e^{-\alpha_j x}\, dx = \int_0^\infty 1\, dx = \infty$$

Detailně: musíme ukázat, že pro $\forall$ posl. α_j, $\alpha_j \to 0+$, $\alpha_j \neq 0$ $\forall j$

platí: $\lim_{j \to \infty} F(\alpha_j) = \infty$

zvolme takovou α_j, pak

$$\lim_{\alpha_j \to \infty} F(\alpha_j) \geq \liminf F(\alpha_j) \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^\infty \liminf_{j \to \infty} e^{-\alpha_j x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lim_{j \to \infty} e^{-\alpha_j x}\, dx = \int_0^\infty 1\, dx = \infty$$

Neboť $\limsup \geq \liminf = \infty \Rightarrow \limsup = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha) \ \exists \quad a = \infty$$

(4)

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

Heine, zvolme α_j

$$\lim_{j \to \infty} \int \geq \liminf_{j\to\infty} \int \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int \liminf$$

$$\geq \int_0^\infty \lim_{j\to\infty} x^{\alpha_j - 1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x}\, dx = \infty$$

konvergence u "0"

(5)

$$\lim_{\alpha \to 2+} \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\, dx$$

volíme $\alpha_j \xrightarrow{j\to\infty} 2+$

analogicky

$$\lim_{j\to\infty} \int \geq \liminf_{j\to\infty} \int \geq \int \liminf f = \int \lim_{j\to\infty}$$

$$\int_0^\infty \lim_{j\to\infty} \frac{x}{2+x^{\alpha_j}}\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^2}\, dx = \infty$$

$\Downarrow$

div u ∞ jako $\frac{1}{x}$

(6)

$$\lim_{\alpha \to 1-} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\ln(\alpha - \sin x)} \, dx$$

tip

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\ln(1-\sin x)} \, dx$$

"0": srovnáme s x^{-1}

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\ln(1-\sin x)}}{\frac{1}{x}} = \lim \underbrace{\frac{-\sin x}{\ln(1-\sin x)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x}{-\sin x}}_{-1} = -1$$

tedy $\int_0^{\pi/4} \frac{-dx}{\ln(1-\sin x)}$ se chová jako $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{x} dx$ Diverguje

Zvolme $\alpha_j \to 1-$ a zkoumejme $\int_0^{\pi/4} \frac{-1}{\ln(\alpha - \sin x)} dx$

Fatou

$$\lim_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \liminf_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \int_0^{\pi/4} \liminf_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \lim_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)} dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{\ln(1-\sin x)} dx = -\infty$$

Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|), \quad a \in E_1 .$$

6,20. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

(1)

6,21. Zkoumejte $\displaystyle K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x\,e^x}\,dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 ($M = (0,+\infty)$, $A = (-1,+\infty)$) – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a\in A} \left| \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\right)\right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$G(x) = \sup_{a\in(-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1 \qquad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $G \notin \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$.

1

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p, +\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.
Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$
(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

② $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}} \, dx$

$D = (0, \infty)$ $\quad I = (-1, \infty)$

(1) $f(\cdot, x)$ diferencovatelná (x pevné, dle α diferenc.)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{-e^{-\alpha x^2} \cdot (-x^2)}{x e^{x^2}} = x \, e^{-x^2(\alpha+1)}$$

(3) majoranta
sup neprojde
interval $[p, \infty) \subset (-1, \infty)$

majoranta $\underline{x e^{-x^2(p+1)}} \in L^1(\underbrace{0, \infty}_{D})$

(2) $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná $\forall \alpha \in (-1, \infty)$
(spojitá)

(4) $\alpha_0 = 0$ $\quad \int_0^\infty \frac{0}{x e^{x^2}} dx = 0$ ok

Pak $F'(\alpha) = \int_0^\infty x e^{-(\alpha+1)x^2} dx = \frac{1}{2(\alpha+1)}$ $\quad \alpha \in (-1, \infty)$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\underline{F(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha + 1)}$$

3

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\ ,$$ konvergentní majoranta je

$G(x) = xe^{-px^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$\boxed{F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)}$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}\ .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a|} \leqq \frac{1}{1-p}\ ,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ ,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \ , \quad b,c \in E_1 \ .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

4

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \ , \quad b \geq 0 \ .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Symetrie

Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

5

6,36. Spočtěte $J(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

[Majoranta $e^{-(p+1)x^2}$, $p \in (-1,\infty)$,

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1,+\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\ , \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0,+\infty)$, $A = \langle -1,0\rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2}-1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$]

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) =$
$$= \int_0^{\infty} -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$$

(majoranta – pro $a \in \langle p,q\rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi}\ ,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \quad \text{pro} \quad b \geq 0\ , \ a > 0\ .$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro všechna $a,b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e .

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a \to 0_+} K(a,b) = \lim_{a \to 0_+} \left[\frac{\pi}{b} \cdot \log(b+a) + C(b) \right] = \frac{\pi}{b} \cdot \log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2 + x^2}\, dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b} \log b$,

tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|} \cdot \log(|a| + |b|) \quad \text{pro} \quad a,b \in E_1 , \quad b \neq 0 .$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot \cos bx - e^{-\alpha x} \cdot \cos \beta x}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b, \beta \in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \cos bx\, dx = -\frac{a}{a^2 + b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a \in \langle p, +\infty)$, kde $p > 0$) ,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

(majoranta e^{-ax}) .

Odtud plyne , že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + C(\alpha, \beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2} \log \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad \alpha > 0 , \quad b, \beta \in E_1 .$$

6 !

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a \in (0, +\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a \in \langle p, +\infty)$, kde $p > 0$) .

$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b > 0 \,.$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ‖

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$!

a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p \rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \le \frac{|\operatorname{arctg} ax| \,.\, |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \ge 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)} \, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0 \,,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20, byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20, dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \, \partial b}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b \ge 0 \,.$$

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

7

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?). Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$F(0,k) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \ .$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61 ,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = -\, e^{-kx} \cdot \sin ax \ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \ , \qquad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \text{arc tg}\,\frac{a}{k} + C(a) \ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a . Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.

Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\text{arc tg}\,\frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Tedy $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi.

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je !

1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

Note that
$$0 \le \int_X (f - g_n)\, d\mu \le \int_X (h_n - g_n)\, d\mu \le \frac{1}{n}.$$
Thus taking the limit $n \to \infty$ proves the last claim of the problem.

JPE, May 1990. Does there exist a sequence of functions $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ that converges uniformly to zero on every compact set, but $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = 1$ for all n?

Yes, Example: $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

JPE, May 1990. Let f be a non-negative function defined on $\mathbb{R}$. Assume that for all $n \ge 1$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x)\, dm \le 1.$$
Show that $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\|f\|_1 \le 1$.

Note that for each $x \in \mathbb{R}$, the sequence $\frac{n^2}{n^2+x^2}$ monotonically increases and converges to 1, as $n \to \infty$. Thus the integrand $\frac{n^2}{n^2+x^2} f(x)$ monotonically increases (in n) and converges to $f(x)$ as $n \to \infty$. By the Lebesgue Monotone Convergence
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x)\, dm \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm = \|f\|_1.$$

JPE, Sept 1989. Let f_n be a sequence of continuous functions Lebesgue integrable on $[0,\infty)$ which converges uniformly to a function f Lebesgue integrable on $[0,\infty)$. Is it true that
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

False. Example: we set $f(x) \equiv 0$ and define f_n by $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ for $x \in (0,n)$ and $f(x) = 0$ for $x \ge n$. Then $\int_0^\infty |f(x) - f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}$ for all n.

5 Lebesgue integral: "equipartitions"

Note: in all the problems of this section the function f must be real-valued, even though this assumption is NOT made explicitly in any of them, for some reason.

JPE, May 2011. Let $f \in L^1(-\infty,\infty)$. Let $\{a_n\}$ be a sequence of strictly positive numbers, i.e., $a_n > 0$ for any n, such that $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$. Prove that there exists a partition of $\mathbb{R}$ into measurable sets $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ such that $\int_{E_n} f\, dm = a_m \int_{\mathbb{R}} f\, dm$ for all n.

Consider the function $F(x) = \int_{(-\infty,x)} f\, dm$. It is a continuous function on $\mathbb{R}$. Indeed,
$$F(x+\delta) - F(x) = \int_{[x,x+\delta)} f\, dm$$
By the triangle inequality
$$|F(x+\delta) - F(x)| \le \int_{[x,x+\delta)} |f|\, dm$$
We know that $\mu(E) = \int_E |f|\, dm$ is a measure in $\mathbb{R}$, and it is a finite measure because $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} |f|\, dm < \infty$. Hence by the continuity we have
$$\int_{[x,x+\delta)} |f|\, dm = \mu([x, x+\delta)) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \mu(\{x\}) = \int_{\{x\}} |f|\, dm = 0,$$
because $\{x\}$ is a singleton whose Lebesgue measure is zero. (Note: the continuity of $F(x)$ was a separate problem in **JPE, Sept 1995 and May 1992.**)

Next, we have the following limits:
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = I : = \int_{\mathbb{R}} f\, dm.$$
Indeed,
$$|F(x)| \le \int_{(\infty,x)} |f|\, dm$$
and by the continuity we have
$$\lim_{x\to-\infty} \int_{(-\infty,x)} |f|\, dm = \int_{\emptyset} |f|\, dm = 0,$$
Similarly,
$$|I - F(x)| \le \int_{[x,\infty)} |f|\, dm$$
and by the continuity we have
$$\lim_{x\to\infty} \int_{[x,\infty)} |f|\, dm = \int_{\emptyset} |f|\, dm = 0.$$
Now suppose first that $I \neq 0$. By the intermediate value theorem there are points $-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < \infty$ such that
$$F(x_n) = (a_1 + \cdots + a_n)I \qquad \text{for all } n \ge 1.$$
Let $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. If $x_* = \infty$, we choose $E_1 = (-\infty, x_1]$ and $E_n = (x_{n-1}, x_n]$ for all $n \ge 2$. If $x_* < \infty$, then $\int_{[x_*,\infty)} f\, dm = 0$, and we choose $E_1 = (-\infty, x_1] \cup [x_*, \infty)$ and $E_n = (x_{n-1}, x_n]$ for all $n \ge 2$.

You don't need to invoke the Lesbesgue Criterion for Riemann integrability. Here's another way.

First, boundedness is clear, so all we need to show is that for any $\epsilon > 0$, we can find some partition, $P \subset [0, 1]$ such that $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$, where $U(f, P)$ is the upper estimate for $\int f$ and $L(f, P)$ is the lower estimate for $\int f$.

Here's the motivation. We want to split off the interval into "good" and "bad" intervals. The "good" intervals is precisely $[0, 1] \setminus K$, since $f = 0$ on those intervals. So, the only thing we need to worry about are the "bad" intervals and we'll just try to make the size of the "bad" intervals go to 0.

Let's construct our partition. The cantor set is constructed by repeatedly removing the middle third of each interval. Let E_n be the set of endpoints in the n^{th} iteration of this construction. Choose P_n to be the partition with endpoints corresponding exactly to those of of E_n.

Let A be the intervals in P_n such that $A \cap K = \emptyset$. In other words, A consists of exactly those intervals that do not contain any elements from the Cantor set. Let B be the intervals in P_n such that $B \cap K = K$. It is clear that A and B are disjoint.

We can now finish our proof. It is clear that $U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0$ on A. Noting that the length of the Cantor set is $(\frac{2}{3})^n$, we have $U(f, P_n) - L(f, P_n) \leq (\frac{2}{3})^n$ on B.

Hence $U(f, P_n) - L(f, P_n) \leq (\frac{2}{3})^n < \epsilon$ for n sufficiently large.

V 2012

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\, dx$$

Na dkuh

$$F'(\alpha) \overset{?}{=} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{-e^{-\alpha x^2} \cdot (-x^2)}{x e^{x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, e^{-x^2(\alpha+1)}\, dx = \left[\frac{e^{-x^2(\alpha+1)}}{-2(\alpha+1)} \right]_{x=0}^{x=\infty} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2(\alpha+1)}}}$$

Odtud $\quad F(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha+1) + c$

neb $\quad F(0) = \int_0^\infty 0\, dx = 0 \quad$ je

$$0 = \frac{1}{2} \ln(1) + c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

celkem $\quad F(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha+1)$

Deuh

(De-1) pro s.v. $x \in (0,\infty)$ je $f(\cdot, x)$ dif. podle α na $\alpha \in (-1,\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = x e^{-x^2(\alpha+1)} \qquad \checkmark$$

(De-2) $\forall \alpha \in (-1,\infty)$ je $f(\alpha, \cdot)$ spoj na $(0,\infty)$ $\rightarrow$ tedy měř. $\checkmark$

(De-4) $\exists\ \alpha_0 \in (-1,\infty)$: $f(\alpha_0, \cdot)$ je integr. $\rightarrow$ Ano $\alpha_0 = 0$

(De-3) majoranta pro $x e^{-x^2(\alpha+1)}$

volme $\alpha \in [p,\infty)$ $p > -1$. Pak je majoranta

$$x e^{-x^2(p+1)} =: g(x) \qquad \checkmark$$