8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na I,*

(De-2) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in I$ a $x \in D$ je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $f(\alpha_0, \cdot)$ je integrovatelná na D.*

Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná na D, funkce $F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$ je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

Lemma 2 (Fatouovo)**.** *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

Věta 3 (Heineova věta)**.** *Nechť $c \in R^*$, $A \in R^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) *Platí $\lim_{x \to c-} f(x) = A$.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

Příklady

1. Spočtěte limity

(a)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x,$$

na intervalu $(0, \infty)$. Spočtěte $\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha)$.

(b)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x}\, \mathrm{d}x,$$

na intervalu $(0, \infty)$. Spočtěte $\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha)$.

(c)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

na intervalu $(2,\infty)$. Spočtěte $\lim_{\alpha\to 2+} F(\alpha)$.

(d)

$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln(\alpha - \sin x)}\,\mathrm{d}x,$$

na intervalu $(\sqrt{2}/2, 1)$. Spočtěte $\lim_{\alpha\to 1-} F(\alpha)$.

2. Spočtěte

(a)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in(-1,\infty)$$

(b)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in(-1,\infty)$$

(c)

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha=\beta)\vee(\alpha,\beta>0)$$

(d)

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha=\beta)\vee(\alpha,\beta\geq 0)$$

Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

(e)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in(-1,\infty)$$

(f)

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\arctan\alpha x - \arctan\beta x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha=\beta)\vee(\alpha,\beta>0)\vee(\alpha,\beta<0)$$

(g)

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \beta\in(0,\infty),\alpha\in\mathbb{R}$$

Hint:dce dle α, $\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \beta/(\alpha^2+\beta^2)$.

Bonus

3. Existuje posloupnost funkcí $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ taková, že konverguje (stejnoměrně) k nulové funkci na každém kompaktu a zároveň platí, že $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$?

4. Je pravda, že charakteristická funkce Cantorova diskontinua je Lebesgueovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná?