$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$$

(a) D_F

(b) spojitost

(c) limity

(a) $\alpha > 0$ Přímý výpočet

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

$\alpha \leq 0$ div

$F(\alpha) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = \lim \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha) = \lim \frac{1}{\alpha} = \infty$$

(b) věta

$f(\alpha, x) = e^{-\alpha x}$ $\quad \underset{\alpha}{(0,\infty)} \times \underset{x}{(0,\infty)}$

$U \times D$

(Sp-1) $f(\cdot, x)$ spojitá v α pro s.v. $x \in (0,\infty)$

(Sp-2) $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná $\alpha \in (0,\infty)$

(Sp-3) majoranta

Pokus $\sup_{\alpha \in (0,\infty)} e^{-\alpha x} = 1 =: g(x) \notin L^1(0,\infty)$

Trik $\quad A = [\delta, \infty)$

$$\sup_{\alpha \in [\delta, \infty)} |e^{-\alpha x}| \le e^{-\delta x} =: g(x) \in L^1(0,\infty)$$

majoranta ;)

(c) limita

(Li-1) $\quad$ s.v. $x \in (0,\infty)$ $\quad$ x pevné

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha x} = 0$$

(Li-2) $\quad$ stejně jako (Sp-2)

(Li-3) $\quad$ majoranta na $\alpha \in [10,\infty)$ jest $g := e^{-10x}$

3/ F je spojitá v (p,q) $\Longleftrightarrow$ F je spojitá v <u>každém</u> intervalu $\langle p_0, q) \subset (p,q)$.

Těchto jednoduchých vět tedy budeme v dalších příkladech používat, podrobně si je prostudujte a promyslete!

Tatáž poznámka platí i pro použití věty 61, hledáme-li konvergentní majorantu G, kde opět bývá nejlepší zkusit

$$G(x) = \sup_{\alpha \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| .$$

6,3. Ukažte, že funkce F, $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx$, je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

1/ Ukažte nejdříve – jako cvičení – že tento integrál konverguje, právě když $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $\langle 0, +\infty)$, použijeme větu 60, kde klademe $M = (0, +\infty)$, $A = \langle 0, +\infty)$. Ověříme předpoklady:

Sp-2 1/ pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ (jakožto funkce x !) spojitá v $(0, +\infty)$, tedy $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

Sp-1 2/ pro každé $x \in (0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ (jakožto funkce α !) spojitá v $\langle 0, +\infty)$,

Sp-3 3/ Položíme-li $\boxed{g(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0,+\infty)} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}}$, je $\boxed{g(x) = \frac{1}{1+x^2}}$ na $(0, +\infty)$ a tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Tím jsme ověřili všechny předpoklady věty 60 a podle tvrzení této věty je funkce F spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ ‖

6,4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ je spojitá v $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\alpha \in (0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $(0, +\infty)$, položte ve větě 60 $A = (0, +\infty)$, $M = (0, +\infty)$ a ověřte předpoklady 1/ a 2/.

Hledejme konvergentní majorantu, nejvýhodnější je zkusit $g(x) =$

welzo $\sup_{\alpha \in (0,+\infty)} e^{-\alpha x}$, odtud plyne, že $g(x) = 1$ pro každé $x \in (0, +\infty)$ a není tudíž $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (proč?).

Zkusme postupovat podle poznámky 6,2. Stačí, ukážeme-li, že funkce F

(3) $F(\alpha) = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x}}_{f(\alpha,x)} dx \qquad \alpha \in (0,\infty)$

- konverguje vůbec?

  $0 < \sin x < 1$ neboť $x \in (0,\pi)$

  tedy $1 + \alpha \sin x > 1$ $\to$ ln je dobře definován

  a pak $f(\alpha,x) \geq 0$

  v 0: $\frac{\ln(1+\alpha \sin x)}{x} \approx \frac{\alpha \sin x}{x} \approx \alpha$

  v π: jde spojitě do 0

- $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$ $\to$ půjde asi do ∞, použijeme Fatou lemma

  $\to$ více na 8. cvičení

- $\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha) \underset{\text{ne hned}}{=} \int_0^\pi \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln(1+\alpha\sin x)}{x} dx$

  $= \int_0^\pi \frac{0}{x} dx = 0$

(Li-1) $\forall x \ x \in (0,\pi)$ $\lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln(1+\alpha\sin x)}{x} = 0$

lim J.

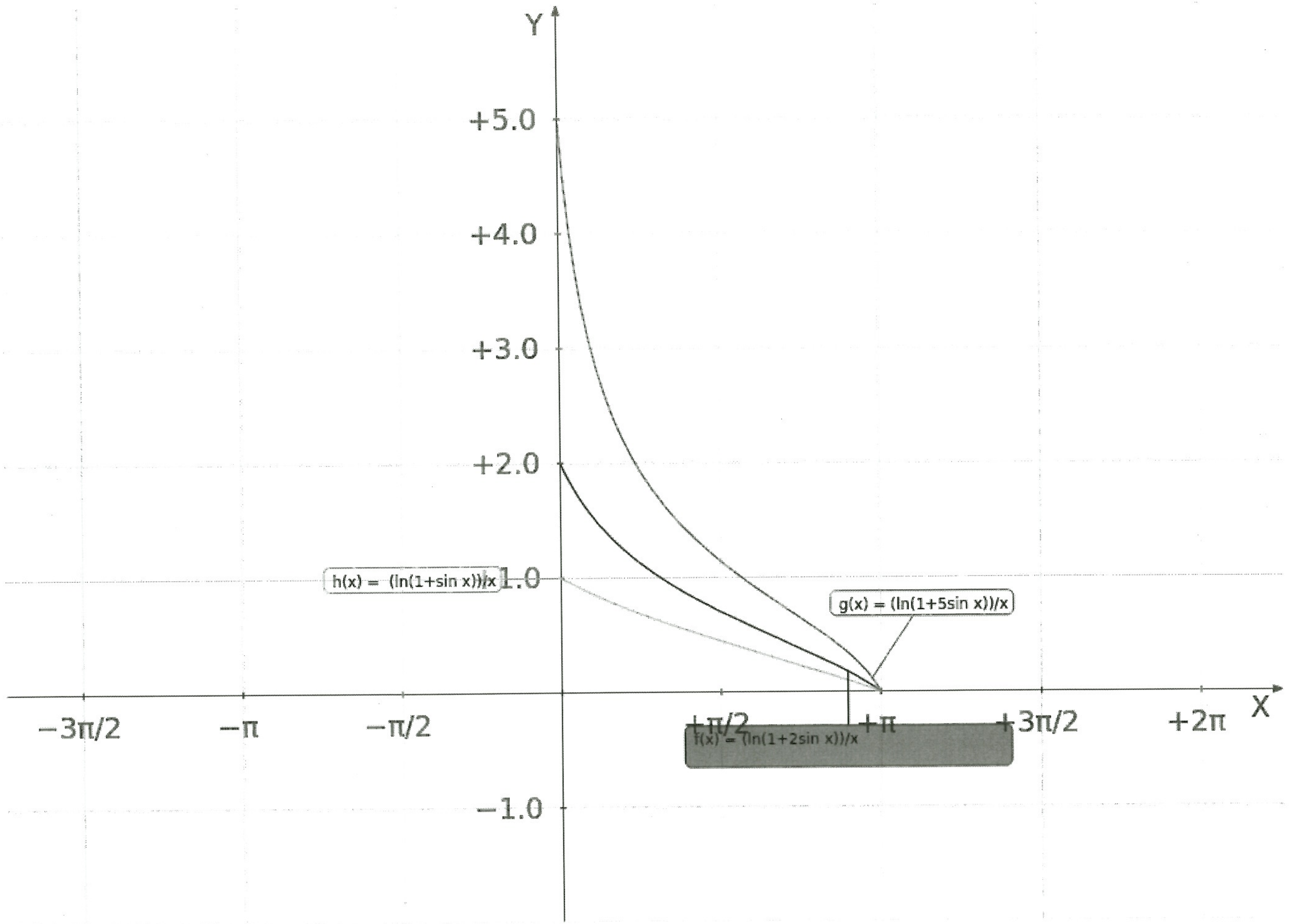
(Li-2) fixujme α. Pak funkce $\frac{\ln(1+\alpha\sin x)}{x}$

(jako funkce x) je spojitá $\to$ tedy měřitelná
pro $x \in (0,\pi)$

(Li-3) majoranta, bude stačit pro $\alpha \in (0,1]$

pak $\frac{\ln(1+\alpha\sin x)}{x} \underset{\text{známe}}{\leq} \frac{\alpha \sin x}{x} \leq \alpha \leq 1$ je majoranta na $[0,\pi]$

Hned splaceno.


Y
+5.0
+4.0
+3.0
+2.0
1.0
−1.0
X
−3π/2
−π
−π/2
+π/2
+π
+3π/2
+2π
h(x) = (ln(1+sin x))/x
g(x) = (ln(1+5sin x))/x
f(x) = (ln(1+2sin x))/x

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max \left(\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x^p} \right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup\limits_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) , \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty) , \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max (e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x} (x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) . \end{cases}$

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,1)$, konvergentní majoranty:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (0,1) \\[2mm] \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ x^{q-2} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.}$$ ‖

$\boxed{6,12.}$ Dokažte, že

a/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty a\,e^{-a^2x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$.

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

‖ Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

(5)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\,dx$$

$\alpha \in (-\infty, \infty)$

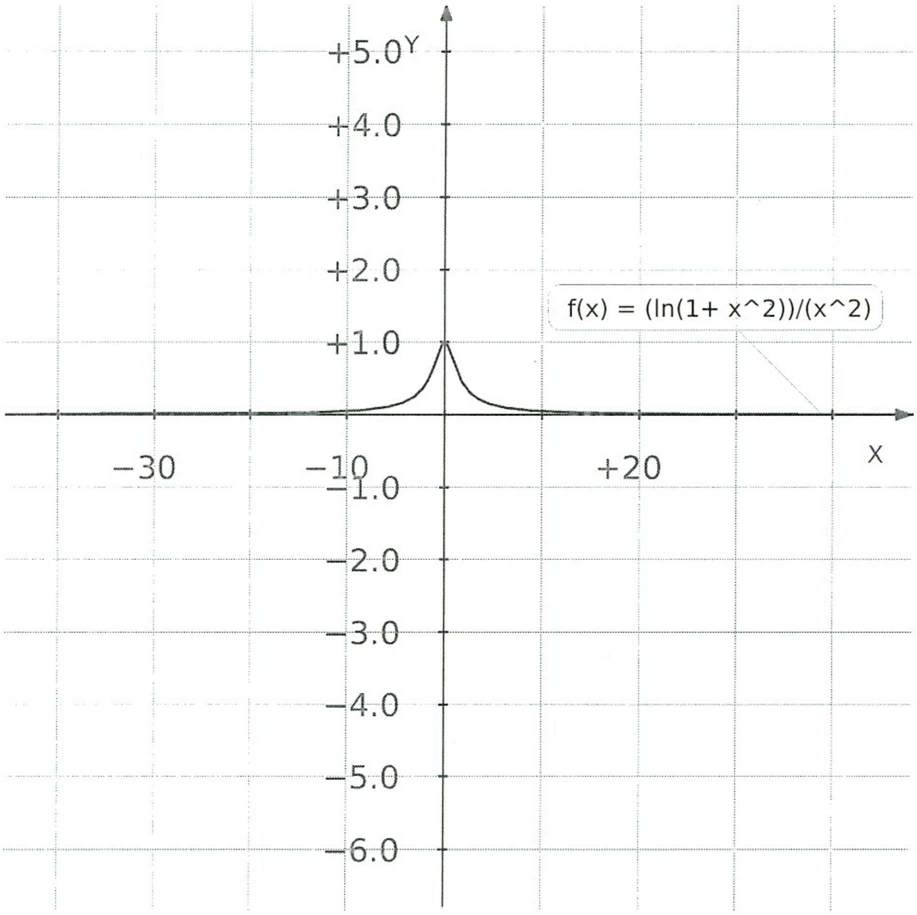
(1) $f(\cdot, x)$, $x \in (0,\infty)$ je spoj. v (α) (složení spoj. fcí)

(2) $\forall \alpha \in (-\infty, \infty)$ je fce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná (dodefinujeme)

(3) majoranta

pro $[-p, p]$

$$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2},$$


+5.0
Y
+4.0
+3.0
+2.0
+1.0
f(x) = (ln(1+ x^2))/(x^2)
−30
−10
+20
X
−1.0
−2.0
−3.0
−4.0
−5.0
−6.0

$$a \in \langle p,q \rangle \Rightarrow \left| a e^{-a^2 x} \right| \leq q e^{-p^2 x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} . \rfloor$$

4/ Zkoumejme nyní spojitost funkce F v bodě $a = 0$. Abychom ukázali, že F je spojitá v bodě $a = 0$, stačilo by ukázat (ale není to nutné!), že F je spojitá v nějakém intervalu $\langle -p, +p \rangle$, kde $p > 0$.
Zkoumejme, jak vypadala majoranta na intervalu $(0,+\infty)$ pro $a \in \langle -p,p \rangle$

$$g(x) = \sup_{a \in \langle -p,p \rangle} \left| a e^{-a^2 x} \right| = \max \left(p e^{-p^2 x} ; \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

(proveďte podrobně!). Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, nemůže být ani $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$. Vidíme, že se nám nepodaří nalézt konvergentní majorantu k funkci $a e^{-a^2 x}$ na $(0,+\infty)$ pro žádný interval $\langle -p,+p \rangle$ (z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce F nebyla spojitá v bodě $a = 0$!). Spočtěte však, že $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$ – tedy F není spojitá v bodě $a = 0$.
I když tedy funkce $f(x,a)$ byla spojitá pro každé pevné $x \in (0,+\infty)$ v bodě $a = 0$, není funkce $F(a) = \int_0^\infty f(x,a)\, dx$ spojitá v bodě $a = 0$.

$\boxed{6,14.}$ Uvažujme $F(a) = \int_0^1 \mathrm{sign}(x-a)\, dx$.

1/ Pro každé $a \in E_1$ je $\mathrm{sign}\,(x-a) \in \Lambda_{(0,1)}$ (odůvodněte!).
Protože $|\mathrm{sign}\,(x-a)| \leqq 1$ pro $x \in (0,1)$, je $\mathrm{sign}(x-a) \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $a \in E_1$.

2/ Buď $x \in (0,1)$ pevné, potom funkce $\mathrm{sign}(x-a)$ (jakožto funkce a!) je spojitá ve všech bodech $a \in E_1$ s výjimkou bodu $a = x$, kde je nespojitá. tedy nelze užít větu

3/ Lehko zjistíte, že

$$F(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad a \in (-\infty, 0\rangle , \\ 1 - 2a & \text{pro} \quad a \in (0,1) \\ -1 & \text{pro} \quad a \in \langle 1,+\infty) , \end{cases}$$

tedy F je spojitá v celém E_1.

Proti příkladu 6,13 je nyní $f(x,a)$ nespojitá (při pevném x jako funkce a/ a funkce $F(a)$ spojitá.

$\boxed{6,15.}$ Uvažujeme $F(a) = \int_1^3 \mathrm{sign}\ a\, dx$.

1/ Ukažte, že pro libovolné $a \in E_1$ integrál konverguje.

2/ Funkce $\mathrm{sign}\ a$ je nespojitá v bodě $a = 0$.

a/ $g_1(x) = \frac{|\cos x|}{x^q} + \frac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\frac{1}{x^p}, \frac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0, +\infty)$.

$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \infty$

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p,q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

3/ $F(a) = \int_0^1 x^a \, dx$ je spojitá funkce v $(-1, +\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^{\infty} x^n \, dx$ je spojitá funkce v $(-\infty, -1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \, dx$ je spojitá funkce v $(0, +\infty)$.

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{2 + x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2, +\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2, +\infty)$, viz př. 3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p, +\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup\limits_{a \in \langle p, +\infty)} \frac{x}{2 + x^a}$ pro $x \in (0, +\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2 + x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2 + x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^a} \, dx$ je spojitá v intervalu $(1, +\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1, +\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p, q \rangle \subset (1, +\infty)$,

$$\text{majoranta } g(x) = \sup_{a \in \langle p, q \rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2}, +\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2}, +\infty)$ pro $a \in \langle p, q \rangle \subset (1, +\infty)$:

JPE, May 1998. Let $A \subset [0,1]$ be a non-measurable set. Let $B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$.
(a) Is B a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^2$?
(b) Can B be a closed subset of $\mathbb{R}^2$ for some such A?

(a) Yes. The set B is a subset of a straight line ($y = 0$), so it has outer measure zero. Thus it is Lebesgue measurable.

(b) No. If B was closed in $\mathbb{R}^2$, then A would be closed in $[0,1]$, and then it would be measurable.

JPE, Sept 1997. For a measurable subset $E \subset \mathbb{R}^n$, prove or disprove:
(a) If E has Lebesgue measure zero, then its closure has Lebesgue measure zero.
(b) If the closure of E has Lebesgue measure zero, then E has Lebesgue measure zero.

(a) False. Example: E consists of points with all rational coordinates. E is countable, hence $m(E) = 0$. On the other hand, E is dense in $\mathbb{R}^n$, hence its closure is $\mathbb{R}^n$.

(b) True. Since E is a subset of its own closure, then E also has Lebesgue measure zero.

JPE, May 1993. Let r_n be an enumeration of rational numbers in $\mathbb{R}$.
(a) Show that $\mathbb{R} \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$ is never empty.
(b) Show that $\mathbb{R} \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n})$ can be empty or non-empty, depending on how the rationals are enumerated.

(a) By the σ-subadditivity of the Lebesgue measure

$$m\big(\cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \tfrac{1}{n^2}, r_n + \tfrac{1}{n^2})\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} m\big((r_n - \tfrac{1}{n^2}, r_n + \tfrac{1}{n^2})\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n^2} < \infty,$$

thus these intervals cannot cover the entire $\mathbb{R}$.

(b) Now the above estimate gives $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty$, thus our previous argument would not work. However presenting specific examples of enumeration so that the above intervals cover (or do not cover) $\mathbb{R}$ is not easy. Let us not get into these complications...

JPE, May 1990. Does there exist a measure space $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ such that there is no countable collection of subsets $X_n \in \mathfrak{M}$ satisfying $\mu(X_n) < \infty$ for all n and $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Yes. Example: μ is the counting measure on $\mathbb{R}$ with Borel σ-algebra.

JPE, May 1989. Does there exist an open dense subset $A \subset [0,1] \times [0,1]$ such that its complement $([0,1] \times [0,1]) \setminus A$ has positive Lebesgue measure?

Yes. The complement to a modified two-dimensional Cantor set.

2 Measurable functions

JPE, Sept 2011. Is the following true of false?
If $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ is continuous a.e., then f is measurable.

True. Let $E \subset [0,1]$ be the set of points where f is discontinuous. We have $m(E) = 0$. The restriction of f to $E^c = [0,1] \setminus E$ is continuous, hence for any open set $U \subset \mathbb{R}$ its preimage $f^{-1}(U) \cap E^c$ is open in E^c, therefore $f^{-1}(U) = (V \cap E^c) \cap B$ for some open set $V \subset [0,1]$ and some subset $B \subset E$. Any subset of the null set E is measurable, hence $f^{-1}(U)$ is a measurable set.

JPE, Sept 2011 and May 2005. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Is it true that if the set $\{x \in [0,1] : f(x) = c\}$ is measurable for every $c \in \mathbb{R}$, then f is measurable?

False. Let $A \subset [0,1]$ be a non-measurable set. Define $f(x) = x$ on A and $f(x) = -x$ on $[0,1] \setminus A$. This function is injective, hence $\{x \in [0,1] : f(x) = c\}$ is either empty or a one-point set (a singleton) for each $c \in \mathbb{R}$; in either case it is measurable. But $f^{-1}([0,1]) = A$ is a non-measurable set.

JPE, Sept 2009. Does there exist a sequence $\{f_k\}$ of Lebesgue measurable functions such that f_k converges to 0 in measure on $\mathbb{R}$ but no subsequence converges uniformly on any subset of positive measure?

No. In one of the homework exercises, we proved that if f_k converges in measure, then there is a subsequence $\{f_{n_k}\}$ that converges a.e. Now by Egorov's theorem the convergence must be uniform on a set of positive measure.

JPE, Sept 2007. Show that $f_n(x) = e^{-n|1-\sin x|}$ converges in measure to $f(x) = 0$ on $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

We have

$$|f_n - f| > \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad e^{-n|1-\sin x|} > \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |1 - \sin x| < \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Note that $\sin x = 1$ whenever $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$). Thus the above inequality $|1 - \sin x| < \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ specifies a neighborhood of each point $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ whose size shrinks as $n \to \infty$. Note that there can only be finitely many points $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ in any finite interval $[a,b]$. Thus the Lebesgue measure of the union of the above neighborhoods of these points tends to zero as $n \to \infty$.

If we replace a finite interval $[a,b]$ with an infinite interval, such as (a,∞) or $(-\infty, b)$, then there would be infinitely many of the above points $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ and their neighborhoods within the given interval, and then their union would have an

(iii) Note that $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$ on the interval $[1-\delta, 1]$, thus

$$(a-\varepsilon)k\int_{1-\delta}^{1} x^k\,dx \le k\int_{1-\delta}^{1} x^k f(x)\,dx \le (a+\varepsilon)k\int_{1-\delta}^{1} x^k\,dx.$$

Computing the integral

$$\int_{1-\delta}^{1} x^k\,dx = \frac{1-(1-\delta)^{k+1}}{k+1}$$

gives

$$\frac{(a-\varepsilon)k}{k+1}\left[1-(1-\delta)^{k+1}\right] \le k\int_{1-\delta}^{1} x^k f(x)\,dx \le \frac{(a+\varepsilon)k}{k+1}\left[1-(1-\delta)^{k+1}\right]$$

Taking the limit $k\to\infty$ shows that the middle integral will be eventually "squeezed" between $a-\varepsilon$ and $a+\varepsilon$. Since $\varepsilon>0$ is arbitrary, Part (c) follows.

JPE, May 2009. Suppose that f_n is a sequence of non-negative Lebesgue measurable functions on $(0,10)$ such that $f_n(x)\to f(x)$ for almost all $x\in(0,10)$. Let $F(x)=\int_0^x f\,dm$ and $F_n(x)=\int_0^x f_n\,dm$. Prove that

$$\int_0^{10}(f+F)\,dm \le \liminf_{n\to\infty}\int_0^{10}(f_n+F_n)\,dm.$$

We apply Fatou's Lemma twice. First,

$$F(x)=\int_0^x f\,dm = \int_0^x \liminf f_n\,dm \le \liminf\int_0^x f_n\,dm = \liminf F_n(x).$$

Second,

$$\begin{aligned}\int_0^{10}(f+F)\,dm &\le \int_0^{10}(f+\liminf F_n)\,dm\\ &= \int_0^{10}\liminf(f_n+F_n)\,dm\\ &\le \liminf\int_0^{10}(f_n+F_n)\,dm.\end{aligned}$$

JPE, Sept 2008. Let $f\in L^1(0,\infty)$. Prove that there is a sequence $x_n\to\infty$ such that $\lim_{n\to\infty} x_n f(x_n)=0$.

Denote $c=\liminf_{x\to\infty} x|f(x)|$. If $c=0$, then a sequence as above exists. If $c>0$, then there exists $A>0$ such that $x|f(x)|>c/2$ for all $x>A$. Then

$$\int_{(0,\infty)}|f|\,dm \ge \int_{(A,\infty)}|f|\,dm \ge \int_A^\infty \frac{c}{2x}\,dx=\infty,$$

which contradicts the assumption $f\in L^1(0,\infty)$.

JPE, May 2008 and Sept 2009. Is the following true or false?
There exists a sequence $\{f_n\}$ of functions in $L^1(0,\infty)$ such that $|f_n(x)|\le 1$ for all x and for all n, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ for all x, and

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} f_n\,dm = 1.$$

True. An example: $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$.

JPE, May 2003. Is the following true or false?
There exists a sequence $\{f_n\}$ of functions in $L^1(0,1)$ such that $f_n\to 0$ pointwise and yet $\int_{[0,1]} f_n\,dm\to\infty$.

True. An example: $f_n = n^2\chi_{(0,n^{-1})}$.

JPE, May 2008 and Oct 1991. Is the following true or false?
There exists a sequence $\{g_n\}$ of functions on $[0,1]$ such that

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} g_n\,dm = 0$$

but $g_n(x)$ converges for no $x\in[0,1]$.

True. See "Amazing shrinking sliding rectangles" in the class notes. Note: in the 1991 version, the functions g_n must be continuous. This requires a slight modification of the "sliding rectangles" example.

JPE, Sept 2004. Is the following true or false?
There are measurable functions f_n, $n=1,2,\ldots$, and f on $[0,1]$ such that $f_n(x)\to f(x)$ for every $x\in[0,1]$, but $\int_{[0,1]} f_n\,dm \not\to \int_{[0,1]} f\,dm$.

True. Example: $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ and $f=0$.