7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Limita integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \to \bar{\mathbb{R}}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} f(t, x)$.*

(Li-2) *pro všechna $t \in A$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Li-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in A$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom

$$\int_D \lim_{t \to a,\, t \in A} f(t, x)\, d\mu(x) = \lim_{t \to a,\, t \in A} \int_D f(t, x)\, d\mu(x).$$

speciálně výrazy vyskytující se výše mají smysl.

Věta 2 (Spojitost integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a,*

(Sp-2) *pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Lemma 3 (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

Věta 4. Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0) \subset (p, q)$.

Příklady

1. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.
Spočtěte
$$\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha).$$

2. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $[0, \infty)$.

3. Určete
$$\lim_{a \to 0+} F(a), \qquad \lim_{a \to \infty} F(a)$$
kde
$$F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \sin x)}{x} \, \mathrm{d}x,$$
$\alpha \in (0, \infty)$.

4. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha - 1}}{1 + x} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(0, 1)$.

5. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x^2} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

6. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - \alpha) \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.
Návod: přímým výpočtem, přes větu to nelze.

7. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x} \, \mathrm{d}x,$$
(tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.
Spočtěte
$$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha).$$

8. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^\alpha} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

9. Ukažte, že funkce F
$$F(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

Bonus

10. Nechť $f \in L^1(0, \infty)$. Ukažte, že pak existuje posloupnost $x_n \to \infty$ taková, že $\lim_{n \to \infty} x_n f(x_n) = 0$.

11. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Je pravda, že jestliže množina $\{x \in [0, 1]; f(x) = c\}$ je měřitelná pro $\forall c \in \mathbb{R}$, tak potom je funkce f měřitelná?

12. Ukažte, že jestliže $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou jednoduché funkce, tak potom jsou jednoduché i funkce $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ a $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$.