$$\int_0^1 \ln x \ \ln(1+x)\, dx$$

(1) $f(x) = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{-\ln x}_{\geq 0} \ \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{\geq 0}$

(2) Levi

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \int_0^1 \ln x \ x^{n+1} =$

$$\int \underset{u}{\ln x} \ \underset{v'}{x^{n+1}} = \ln x \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} - \int \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad V = \frac{x^{n+2}}{n+2} \qquad = \ln x \ \frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \left[\underset{\downarrow \, 0}{\ln x \ \frac{x^{n+2}}{n+2}} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(n+2)^2}$$

$$\int_0^1 \ln x \ \ln(1+x)\, dx$$

(1) $f(x) = \ln x \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(2) $g_n = (-1)^n \cdot \underbrace{\left[\ln x \ \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]}_{h_n}$

(d) $h_n \overset{?}{\geq} h_{n+1}$

$\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \frac{x^{n+2}}{n+2}$

$\frac{n+2}{n+1} \geq x \in (0,1)$ ✓

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^n \int_0^1 \ln x \ \ x^{n+1}\, dx = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{-1}{(n+2)^2}}}$

2/ Integrál spočtěte též pomocí Leviho věty, vztahu

$$\frac{\log x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \log x \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1)$$

a příkladu 4,32 . ||

4,34. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cdot \log \frac{1}{x}}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \cdot \log \frac{1}{x}}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cdot \log \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$,

e/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \cdot \log \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{2^2}$!

4,35. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\, dx = \underline{1}$

1/ Integrál spočtěte jako Newtonův - per partes.

2/ Použijte též Leviho větu a vztah

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1).$$

Nezapomeňte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1} \;||$$

4,36. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{8}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cdot \log \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{24}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \cdot \log \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{8} - 1$!

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3}\,dx$$

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3} \qquad x\in(0,\infty)$

(2) Levi

$0 \le f_1 \le f_2 \ \dots$

$$\frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x^3} \overset{?}{\le} \frac{\operatorname{arctg} (n+1)x}{1+x3} \qquad \text{OZ, arctg rostoucí}$$

(3) $\int_0^\infty \lim \frac{\operatorname{arctg} nx}{1+x3} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1/3}{1+x} + \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}$

$(1+x^3) = (1+x)(1+x^2-x)$

$$A - Ax + Ax^2 + B + Bx + Cx^2 + Cx = 1$$

$A + B = 1$

$-A + B + C = 0$

$A + C = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$C = -\frac{1}{3}$

$B = \frac{2}{3}$

$A = +\frac{1}{3}$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{x^2-x+1} + \ln(1+x)^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\underline{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}}\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{3k+1} \cdot \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2}{6} .$$

b/ Můžete použít rozvoje funkce $\frac{1}{1+x^3}$, Lebesgueovu větu a výsledku bodu a/, dostanete

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2}{12} .$$ ‖

4,43. Dokažte, že $\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \cdot \log 2$.

1/ Integrál spočtěte metodou integrace per partes jako Newtonův.

2/ Ze vztahů

$$\left[\log \frac{1+x}{1-x} \right]' = \frac{2}{1-x^2} , \quad \log \underline{1} = 0$$

Rozvoj

odvoďte, že

$$\log \cdot \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pro } x \in (-1,1) ;$$

dále použijte Leviho větu, dostanete

Výpočet

$$\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 2 \log 2$$ (viz př. 4,29). ‖

4,44. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

1/ Použijte rozvoj funkce $\log \frac{1+x}{1-x}$ v intervalu $(0,1)$ jako v př. 4,43 a Leviho větu, dostanete

Výpočet

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$ (viz př. 4,85)

2/ Použijte vztahu

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log (1+x) - \log(1-x)$$

a výsledků příkladů 4,33 , 4,34 . ‖

$$\lim_{n \to \infty} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\ln x + \ln n}$$

dorazní u ∞ :

$$\lim \frac{\frac{1}{\ln x + \ln n}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim \frac{\ln x}{\ln x + \ln n} = 1$$

ale $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ u ∞ diverguje

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$$

tedy

$$\lim \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+e^x}$$

(1) $$\frac{\sin x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{-x}+1} = e^{-x} \sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^{n+1} \sin x$$

(2) (L) $$(-1)^n \cdot \underbrace{\sin x \, (e^{-x})^{n+1}}_{b_n}$$

$$b_n \overset{?}{\geq} b_{n+1}$$

$$\sin x \, (e^{-x})^{n+1} \geq \sin x \, (e^{-x})^{n+2}$$

$$1 \geq e^{-x} \quad \checkmark$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \sin x \cdot e^{-x(n+1)} \, dx$$

$$\int \underset{u'}{\sin x} \; \underset{v}{e^{-xk}} \, dx = -\cos x \, e^{-xk} - \int \underset{u'}{\cos x} \; \underset{v}{k e^{-xk}}$$

$u = -\cos x \qquad v' = -k \, e^{-xk} \qquad\qquad u = +\sin x \qquad v' = k(-k) e^{-xk}$

$$= -\cos x \, e^{-xk} - \left(\sin x \, (k) e^{-xk} + \int \sin x \, k^2 e^{-xk} \right)$$

celkem $$(k^2+1) \int \sin x \, e^{-xk} \, dx = -k \sin x \, e^{-xk} - \cos x \, e^{-kx}$$

tedy $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[- \frac{(n+1) \sin x \, e^{-x(n+1)} + \cos x \, e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \underline{\underline{\sum (-1)^n \frac{1}{1+(n+1)^2}}}$$

4,45. Buď $p \in (0,+\infty)$, potom

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$

Příklady a,b/ jsou analogické k příkladům 4,24; 4,25 , příklady c,d/ lehko odvodíte rozvojem funkcí $\frac{1}{1-x^p}$, $\frac{1}{1+x^p}$
Viz též př. 4,33, 4,34 /substituce $x^p = t$! / anebo př. 6,67 .

4,46. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$,

b/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12}$,

c/ $\displaystyle\int_0^\infty \log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}$

I/ Substitucí $e^{-x} = t$ převeďte dané integrály na integrály z příkladů 4,33 a 4,34.

II/ Příklad a/ řešte pomocí rozvoje funkce $\log(1-e^{-x})$ a Leviho věty, příklad b/ pomocí rozvoje funkce $\log(1+e^{-x})$ a Lebesguovy věty a konečně příklad c/ pomocí rozvoje funkce $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ (viz obdobný příklad 4,43) a Leviho věty.

III/ V příkladu c/ použijte též vztahu $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x})$.

4,47. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$.

1/ Jako cvičení ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (0,+\infty)$.

2/ Použijte rozvoje funkce sin v E_1 -

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro každé } y \in E_1 ,$$

Rozvoj

tedy $\displaystyle e^{-ax}\,.\,\sin bx = e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Dále použijte Lebesgueovu větu, odhadneme částečné součty, "hrubým" odhadem dostáváme

$$\left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\,.\,e^{-ax}\,.\,\frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \le g(x), \text{ kde}$$

$$g(x) = e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(|b|x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty) .$$

Použijte dále vztahů

$$I_n = \int_0^\infty e^{-ax}\,.\,x^n\,dx = \frac{n}{a}\,I_{n-1}\,, \quad I_0 = \frac{1}{a}\,,$$

dostáváme

Výsledek

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \frac{|b|}{a^2}\,.\,\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|b|}{a}\right)^{2k} \qquad \text{(ověřte!)},$$

tedy $g \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$, právě když $|b| < a$ (proč?).
V tomto případě

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

Při tomto způsobu výpočtu integrálu bylo nepříjemné omezení $|b| < a$.

3/ Integrál též spočtěte jako Newtonův pomocí dvojnásobné integrace per partes, jediná podmínka na parametry a,b bude při tomto způsobu výpočtu podmínka $a > 0$.

*4/ Pokuste se také spočítat integrál pomocí následujícího postupu:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \operatorname{Im}\int_0^\infty e^{x(-a+ib)}\,dx = \operatorname{Im}\frac{1}{a-ib} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

4,48. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$!

Volte stejný postup jako v minulém příkladě .

4,49. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ pro $|b| < a$.

1/ Ukažte, že $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1_-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \dfrac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu .

4,6.	Dokažte, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!	

1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx + \int_1^{\infty} x^{-n}\, dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2} , \text{ tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$, potom $\displaystyle\sup_{n\geq 2} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu!

4,7.	Dokažte, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

‖ 1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{1}$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \; ; \; x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geqq 2 \, , \; x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j \right]^{-1} \leq \left[\tfrac{1}{2}\, n\, (n-1)\, \frac{x^2}{n^2} \right]^{-1} \leqq \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu . ‖

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx = 0$!

‖ 1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ ‖.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$.

‖ Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \, , \; n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leqq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} \; . ‖$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na} \quad M \Rightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1 \rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1 \rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1 \rangle$?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\to e^x}} \cdot \sin\frac{x}{n}$$

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \cdot \sin\frac{x}{n} \overset{\text{VOAL}}{=} e^{-x} \cdot 0 = 0$$

$$(2) \quad |f(x)| \le \left|\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right| \to e^{-x}$$

Pro $x \in (1, \infty)$ - binomický rozvoj jeho prvé

Pro $x \in (0, 1)$

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le 2 \in L^1(0,1)$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, x^{p-1+nq}\right| = \left|x^{p-1}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n .\, x^{nq}\right| = \left|x^{p-1} . \frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q}\right| \leq$$

$$\leq x^{p-1}\frac{2}{1+x^q}$$

a poslední funkce již leží v systému $\mathcal{L}_{0,1)}$.

Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu,

Výpočet

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\, x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq} .$$

4,29. Poznámky k příkladu 4,28:

1/ Ukažte, že funkce $\frac{x^{p-1}}{1-x^q} \in \mathcal{L}^R(0,1) - \mathcal{L}(0,1)$.

a/ Dokažte toto tvrzení přímo,

b/ dokažte tvrzení též pomocí Leviho věty:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^q}\,dx = \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p-1+nq}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p+nq} = +\infty .$$

Dosazení

2/ Zkusme do daného integrálu a řady dosadit určité hodnoty p,q - dostáváme:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots \qquad (p=q=1) ,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots \qquad (p=1,\ q=2).$$

3/ Ukažte, že $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p-1+nq}$ nekonverguje stejnoměrně v $(0,1)$, nemohli jsme tudíž užít větu 23

kdyby daná řada konvergovala stejnoměrně v $(0,1)$ musela by konvergovat řada $\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1_-}(-1)^n x^{p-1+nq} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

4,30. Dokažte, že $\int_0^{\infty} e^{-x} . \cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{n!}{(2n)!}$!

1/ Lehko ukážete, že integrál konverguje.

2/ Použijte vztahu

Rozvoj

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{y^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{pro } y \in E_1$$

a ukažte, že

$$e^{-x} . \cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x} . \frac{x^n}{(2n)!} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty).$$

tisk

3/ Použijte Lebesgueovu větu, jest

$$\left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-x} \cdot \frac{x^n}{(2n)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{x^n}{(2n)!} \ .$$

Položte $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{x^n}{(2n)!}$ a ukažte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

(poslední tvrzení plyne například z Leviho věty -

$$\int_0^{\infty} g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{x^n}{(2n)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

a poslední řada konverguje, jak zjistíte lehko např. pomocí d'Alembertova kriteria anebo odhadem $\frac{n!}{(2n)!} \leq 2^{-n}$) .

Tedy $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^n e^{-x} \cdot \frac{x^n}{(2n)!}\, dx =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{(2n)!} \ ,$$

kde jsme použili, že $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n\, dx = n\,!$ (odůvodněte!) ‖

$\boxed{4{,}31.}$ Poznámka.

Funkci g pro použití Lebesgueovy věty jsme hledali v příkladech 4,27, 4,28 a 4,30 ve tvaru $g = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$. Bylo-li $g \in \mathcal{L}_M$, mohli jsme použít Lebesgueovu větu, vyšlo-li $\int_M g = +\infty$ (např. v 4,28), museli jsme volit lepší "jemnější" odhad či postupovat jinak. Používáme tedy vlastně tuto větu (viz větu 3,5 skript Černý - Mařík):

"Buďte $v_n \in \Lambda_M$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_M |v_n| < +\infty$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konverguje absolutně sk.vš., $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \in \mathcal{L}_M$ a $A_M\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$."

Dokažte ji !

$\boxed{4{,}32. \text{ Ukažte, že } \int_0^1 x^p \cdot \log \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{(p+1)^2} \text{ pro } p+1 > 0 \ .}$

‖ Lehko zjistíte, že integrál existuje jako Lebesgueův, pomocí věty o integraci per partes pro Newtonovy integrály jej pak spočítáte jako Newtonův . ‖

$\boxed{4{,}33. \text{ Dokažte, že } \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6} \ !}$

‖ 1/ Substitucí (ať již použijete větu pro Lebesgueovy či Newtonovy integrály) se převede na integrál z př. 4,25 . Proveďte detailně !