4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Pak

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_j\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_j(x)| \leq |g(x)| \qquad j \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Příklady

1. Spočtěte

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} \frac{\sin ax}{x} \,\mathrm{d}x \qquad a \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} \,\mathrm{d}x$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} \,\mathrm{d}x$$

Použijete-li Lebesguea, volte majorantu až pro $n \geq 2$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx} \,\mathrm{d}x \qquad 0 < A < \infty$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x$$

Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1+x)$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} \,\mathrm{d}x$$

Použijete-li Leviho, odhadujte zvlášť $(0,1)$ a $(1,\infty)$

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} \,\mathrm{d}x$$

(h)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}}$$

2. Vyšetřete **Lebesgueovy** integrály:

   (a) $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int_{-\infty 1}^{\infty} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$
   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$
   (d) $\int_{-\infty}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$
   (e) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
   (f) $\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
   (g) Dirichletovy funkce přes interval $[0, 1]$
   (h) Charakteristickou funkce Cantorova diskontinua