3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Pak

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_j\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_j(x)| \leq |g(x)| \qquad j \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Příklady

1. Určete λ míru množiny

   (a) $[0, 1]$
   (b) $(0, 1)$
   (c) $[2, 6)$
   (d) $[0, \infty)$
   (e) přímky v $\mathbb{R}^2$
   (f) elipsa v $\mathbb{R}^2$
   (g) paraboloid v $\mathbb{R}^3$
   (h) $\{1\}$
   (i) $\mathbb{Q}$
   (j) $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$
   (k) Cantorovo diskontinuum

2. Najděte příklad množiny A tak, aby $\lambda(A) > 0$, $A^{\circ} = \emptyset$

3. Spočtěte

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

Použijete-li Lebesguea, volte majorantu až pro $n \geq 2$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x \qquad 0 < A < \infty$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1+x)$

(g)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a \in \mathbb{R}$$

(h)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

Použijete-li Leviho, odhadujte zvlášť $(0,1)$ a $(1,\infty)$

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$$