Řešení. Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0, 1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, dx$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ■

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

P ř í k l a d Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \leq 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \, dx,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ■

(1a) P ř í k l a d Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \, dt,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$.

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$ konverguje !

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův !

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} , \ \ldots$$

(15) 3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

(b)

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x+1$ /proč ?/,
tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .
Zřejmě $(L)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathscr{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/
a $(N)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,
že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

$\boxed{\text{3,33. Dokažte, že } \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathscr{L}_{(1,2)} \text{ !}}$

‖ 1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathscr{L}^{R}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}\text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1\text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathscr{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy
i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathscr{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

$\boxed{\text{3,34. Dokažte, že } \int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty \text{ !}}$

‖ 1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathscr{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\frac{1}{1+x+x^2}$

1c $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$

probl. body "0", "∞"

0: $\sqrt{1+x^3} \approx 1$

$\sin x^2 \approx x^2$

$g(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_0^2 f \text{ k} \iff \int_0^2 x^2 \text{ k} \quad \checkmark$$

"∞"

$|\sin x^2| \leq 1$

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x^2|}{\sqrt{1+x^3}}\, dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

$g(x) = 1/x^{3/2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim \sqrt{\frac{x^3}{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\frac{x^3}{1+x^3} \to \frac{1}{1+0}$$

$$\int_2^\infty f \text{ k} \iff \int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} \text{ k}$$

$-\frac{3}{2} < -1 \quad \checkmark$

Závěr $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ k

4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a,b) (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje" a „neexistuje", protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

§20. První metodou je použití věty, která říká, že *je-li f funkce* **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a,b]$, *pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

<u>Příklad</u> Integrál $\int_7^{50} \operatorname{arctg}(x^5+16)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7,50]$.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože funkce

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

je spojitá na $[0,1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce f od a do b závisí jen na hodnotách f na (a,b) a ne na tom, zda a případně jak je f definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

§21. Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha>-1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha<-1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

(1d) <u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x=[x\log x]_0^1-\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=-1.$$

(1e) $\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,dx$

problém pouze u "0"

- $q < 1$: $\frac{|\sin x^p|}{x^q} \le \frac{1}{x^q}$

  tedy ze srovnávacího kritéria $\int_0^1 f$ K

- $q \ge 1$ srovnáme s $g(x) = \frac{x^p}{x^q}$
- $p > 0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x^p}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^p}{x^p} = 1$$

$$\int_0^1 f \text{ K} \iff \int_0^1 x^{p-q} \text{ K} \iff p-q > -1$$

- $p = 0$ $f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$

$$\int_0^1 f \text{ K} \iff \int_0^1 \frac{1}{x^q} \text{ K} \qquad -q > -1$$

- $p < 0$ $y = x^p$ $y^{1/p} = x$

$$dy = p x^{p-1}\,dx \qquad \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = dx$$

$$\int_\infty^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = \left|\frac{1}{p}\right| \int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}-\frac{1}{p}+1}}\,dy$$

$\frac{q-1}{p}+1 < 2$ $\qquad \frac{q-1}{p} < 1$

závěr: $(q<1 \quad p\in\mathbb{R}) \vee (q\ge 1, p>0 \quad p-q>-1) \vee \left(p<0,\ q\ge 1,\ \frac{q-1}{p}<1\right)$

(1f) (1)

Př:

$$\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,dx \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}$$ nezáporná, spojitá na $(0,1)$ a $(1,\infty)$

v bodě 1: co když $\alpha < 0$? pak nedef

Singularita: $0, 1, \infty$

"0": $k \geq 0$ $\quad x^k \leq 1 \quad$ 1 vede nad x^k

$k < 0$ $\quad x^k > 1 \quad$ x^k vede nad 1

! bývá výhodné vytknout vedoucí člen

$$\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k} = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k(1+x^{-k})}$$

• $k \geq 0$ $\quad g(x) = |\ln x|^\alpha$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \ k \iff \int_0^{1/e} |\ln x|^\alpha\,dx \ k \iff \alpha \in \mathbb{R}$$
(srovnání x^0)

• $k < 0$ $\quad g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \lim \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \ k \iff \int_0^{1/e} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k} \quad k<0 \quad k \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

celkem: u 0 konv. $\forall k, \alpha \in \mathbb{R}$

(1)

(1f) "1"

jmenovatel je kamarád ☺ $\quad 1+x^k \to 2 \quad \forall k$

$|\ln x|^\alpha \approx |1-x|^\alpha \qquad$ neb $\quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$g(x) = (1-x)^\alpha$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$

P̊ nutno vyšetřit z obou stran

- $\int_{1/e}^{1} f(x)$ k $\iff \int_{1/e}^{1} g(x)\,dx$ k $\iff \int_{1/e}^{1} (1-x)^\alpha$ k $\iff \alpha > -1$

- $\int_{1}^{e} f(x)\,dx$ k $\iff \qquad \alpha > -1$

"∞"

- $k \geq 0 \qquad 1+x^k \approx x^k \qquad 1+x^k = x^k(1+x^{-k})$

$g(x) := \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 1/2 & k=0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

$\int_e^\infty f(x)\,dx$ k $\iff \int_e^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}\,dx \iff$ buď $k>1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$
nebo $\quad k=1 \quad \alpha < -1$

- $k<0 \qquad g(x) := |\ln x|^\alpha \qquad 1+x^k \approx 1$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\int_e^\infty f(x)\,dx$ k $\iff \int_e^\infty |\ln x|^\alpha$ k $\iff$ NIKDY

Závěr $\quad \int_0^\infty f(x)\,dx$ k $\iff \underline{k>1 \ \& \ \alpha > -1}$

(1g) i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^a x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^a x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^a x \, dx$

Integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, potenciálně problematické jsou oba kraje.

v 0: $\mathrm{tg}\, x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0}$ $\qquad \mathrm{tg}^a x = \underbrace{\frac{\sin^a x}{x^a}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^a x}}_{\to 1} \cdot x^a$

Srovnávat tedy budeme s x^a: $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\mathrm{tg}^a x}{x^a} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \frac{1}{\cos^a x} \underset{\text{VoLSF}}{\overset{\text{VoAL}}{=}} 1 \cdot 1 = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^a x \, dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^a \, dx$ KONV. $\Leftrightarrow a > -1$

v $\frac{\pi}{2}$: $\mathrm{tg}\, x = \underbrace{\sin x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$ $\qquad \mathrm{tg}^a x = \underbrace{\sin^a x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}\right)^a}_{\to 1} \cdot \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^a}$

Taylor v $\frac{\pi}{2}$ pro $\cos x$: $\cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(1 + o\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

Srovnávat tedy budeme s $\frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^a}$: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\mathrm{tg}^a x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^a}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sin^a x \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}\right)^a \underset{\text{VoLSF}}{\overset{\text{VoAL}}{=}} 1$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^a x$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-a} dx$ KONV. $\underset{\text{subs. } y = \frac{\pi}{2} - x}{\Leftrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{-a} \, dy$ KONV $\Leftrightarrow -a > -1 \Leftrightarrow a < 1$

ZÁVĚR: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^a x \, dx$ KONV. pro $a \in (-1, 1)$

DIV. pro $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ÚLOHA 2

a) $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}} \, dx = 2 \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \, dy$ $\qquad$ Integrand $y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}$ je spojitý na $(0, \infty)$.

subst. $\sqrt{x} = y$ $\qquad x \in (0, \infty) \mapsto y \in (0, \infty)$ bijekce

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \infty) \ \forall x \in (0, \infty)$

v 0: $e^{-y} \underset{y \to 0+}{\to} 1 \Rightarrow$ srovnáme s $y^{-\frac{1}{2}}$: $\lim\limits_{y \to 0+} \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}}{y^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{y \to 0+} e^{-y} = 1$

$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}$ KONV., tedy v 0 integrál konverguje

v ∞: $y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \le e^{-y} \quad \forall y \ge 1$

$0 \le \int_1^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \le \int_1^\infty e^{-y} = e^{-1} < \infty \Rightarrow$ KONV, tedy v ∞ integrál rovněž konverguje

ZÁVĚR: $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ KONVERGUJE

(1h) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$

$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ → funkci lze tedy spojitě rozšířit do 0

→ spojitá na kompaktu → AZ

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x+1$ /proč ?/,
tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě (L) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/
a (N) $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,
že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

(1.)

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{R}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\frac{1}{1+x+x^2}$

Řešení. Platí totiž $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ∎

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$ diverguje.

Řešení. Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \ge \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \ge 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}\, dx$ diverguje. ∎

§25. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium.**

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b)$ (kde $-\infty < a < b \le +\infty$), funkce g nechť je kladná na $[a, b)$.

(i) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.

Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.

<u>Příklad</u> Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\, dx$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a, b] = (0, \pi/2]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$

tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha\, dx$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha\, dx$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ∎

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, \pi]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{x}$. Ten ovšem diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ∎

(1j) <u>Příklad</u> Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\, dx$?

(1j)

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0,1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, \mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, \mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, \mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ∎

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

P ř í k l a d   Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \leq 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0,1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}x,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ∎

P ř í k l a d   Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, \mathrm{d}x$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \, \mathrm{d}t,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

(12) $\int_0^\infty x^{s-1} (\log x)^k e^{-x} \, dx$

prob. body: 0, 1, ∞

"0" e^{-x} - OK

tedy srovnáme s $g(x) = x^{s-1}(\log x)^k$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f}{g} = \lim \frac{x^{s-1} \ln^k x}{x^{s-1} \ln^k x} \cdot e^{-x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f \text{ k} \iff \int_0^{1/e} x^{s-1} (\log x)^k \text{ k} \iff \boxed{\begin{array}{l}(s-1 > -1, \ k \in \mathbb{R}) \\ \vee (s-1 = -1, \ k < -1)\end{array}}$$

"1" x^{s-1} OK, e^{-x} OK

$\ln x \approx x-1$

$g(x) = (x-1)^k$

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim x^{s-1} e^{-x} \cdot \frac{(\ln x)^k}{(x-1)^k} \overset{\text{VoAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_{1/2}^1 f(x)\, dx \text{ k} \iff \int_{1/2}^1 (x-1)^k \, dx$$

$$\int_{1/2}^1 (x-1)^k \, dx = \int_0^{1/2} y^k \, dy = \begin{cases} \left[\frac{y^{k+1}}{k+1}\right]_0^{1/2} \\ \left[\ln|y|\right]_0^{1/2} & k=-1 \end{cases}$$

$y = -x+1$

$dy = -dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} k > -1 \text{ k} \\ k \le -1 \text{ D} \end{array}}$$

(12) $\int_1^3 f(x)\,dx$ k $\Leftrightarrow \int_1^3 |x-1|^k\,dx$ k $\Leftrightarrow$ $\boxed{k > -1}$

$$\int_1^3 (x-1)^k dx = \int_0^2 y^k\,dy$$

$y = x-1$

$dy = dx$

"∞" e^{-x} přetlejé ten $\ln^k x$ i to x^{s-1}

máme konvergenci $\int_1^\infty x^{a} e^{bx}$

$$g(x) = x^{s-1}\ x^k\ e^{-x}$$

pak $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}\ \ln^k x\ e^{-x}}{x^{s-1}\ x^k\ e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^k$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

tedy $\int_1^\infty g$ k $\Rightarrow \int_1^\infty f$ k

ale $\int_1^\infty g$ k ✓

Závěr : $s > 0$ $k \in \mathbb{R}$ & $k > -1$

nebo $s = 0$ $k < -1$ & $k > -1$

tedy $s > 0$ $k > -1$

ÚLOHA 1

a) $$\int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} \ [\ln x]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a\neq -1}{} \ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \ \frac{1}{a+1} - \frac{0}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a<-1}{} \ \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\alpha \in \mathbb{R}^+} x^a\,dx \begin{cases} \text{KONV. pro } a>-1 \\ \text{DIV. pro } a\leq -1 \end{cases}$$

---

b) $$\int_1^\infty x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} \ [\ln x]_1^\infty = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \ \frac{\infty}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a<-1}{} \ \frac{0}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\infty} x^a\,dx \ (\alpha>0) \begin{cases} \text{KONV. pro } a<-1 \\ \text{DIV. pro } a\geq -1 \end{cases}$$

(1e) c) $$\int_0^\infty x^a + x^b\,dx = ⊛$$

$$\int_0^\infty x^a\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^a\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^a\,dx}_{=:I_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 < \infty \iff a>-1 \\ I_2 < \infty \iff a<-1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 + I_2 = +\infty \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

$$⊛ = \int_0^\infty x^a\,dx + \int_0^\infty x^b\,dx = \underset{\forall a\in\mathbb{R}}{(+\infty)} + \underset{\forall b\in\mathbb{R}}{(+\infty)} = +\infty$$

---

d) $$\int_0^{e^{-1}} \frac{|\ln x|^a}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} |y|^a\,dy = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \ \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} \ +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

subst. $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(0,e^{-1}) \mapsto y\in(-\infty,-1)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(0,e^{-1})$

---

e) $$\int_1^e \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_0^1 y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a\leq -1}{} \ +\infty \Rightarrow \text{DIV} \\ \overset{a>-1}{} \ \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases}$$

$y=\ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(1,e)\mapsto y\in(0,1)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

F) $$\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \ \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} \ +\infty \Rightarrow \text{DIV} \end{cases}$$

$y=\ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(e,\infty)\mapsto y\in(1,\infty)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

g) $$\int_0^{e^{-1}} x^a |\ln x|^b\,dx$$

• nechť $\varepsilon>0$, pak $\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = 0 \quad \forall b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} x^{-\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = +\infty \quad \forall b\in\mathbb{R}$$

Integrand $x^a|\ln x|^b$ je spojitý na $(0,e^{-1}]$, problematickým bodem je zde 0

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$ srovnáme $\operatorname{tg} x$ s x

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\iff$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

Ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+} \cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

Ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnáme s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v -1

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\iff \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\iff \int_0^1 y^{-\frac12}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v -1: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\iff \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\iff \int_0^1 z^{-\frac12}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

(1 u) d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém je v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1} (<1)$

$$\int_0^1 \cancel{\ln x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

e) $\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

v 0: $\ln^2 x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ ... integrand lze spojitě rozšířit na $[0,1]$, je tedy omezený $\Rightarrow$ KONV.

---

f) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit oba krajní body

v 0: $\operatorname{arctg} x = x + o(x) = x\cdot(1+o(1))$ .. Maclaurin 1. stupně

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot x}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$\int_0 \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0 \sin\frac{1}{x}$ KONV. $\qquad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV.

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin\frac{1}{x}|\,dx \le \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow$ ABS. KONV.

v ∞: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0_+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1$, $\operatorname{arctg} x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}}{x}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

Zadaný integrál tedy konverguje

---

(14) g) $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$, v krajních bodech utíká do $-\infty$.

v 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ ... zkusíme srovnat $\ln(\sin x)$ s $\ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim \cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \overset{VoAL}{=} 1$$

$\int_0^1 \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx$ KONV. $\qquad \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.

v π: $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow[x\to\pi-]{} 1$ ... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě π.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\ln\sin x}{\ln(\pi-x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi-x}} = \lim_{x\to\pi-} (-\cos x)\cdot\frac{\pi-x}{\sin x} \overset{VoAL}{=} 1$$

$\int_1^\pi \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi-x)\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{\pi-1} \ln y\,dy$ KONV.
subst. $y = \pi - x$

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ KONVERGUJE

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0, \frac{1}{2}]$, problém v 0.

$\bullet \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \bullet \lim\limits_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{\text{VoLSF}}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}\,dx \text{ KONV.} \iff \int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x^3}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x} + 1\,dx = +\infty, \text{ tedy DIV.} \Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)} \text{ DIV.}$$

---

(10) j) $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

$\bullet \lim\limits_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy vyšetřit $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}\,dx$

Srovnání: $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)^{1-p}\,dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\quad \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \quad \Rightarrow$ srovnání $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (x-1)^{1-p}\,dx = \int_0^1 y^{1-p}\,dy \Rightarrow 1-p > -1 \iff p < 2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y = x-1$, $dy = dx$, $x\in(1,2) \mapsto y \in (0,1)$ $\qquad \Rightarrow 1-p \leq -1 \iff p \geq 2 \Rightarrow$ DIV.

$\circ\ \lim_{x\to\pi-}\left(\frac{\sin x}{\pi-x}\right)^{p} \overset{\text{VOLSF}}{=} 1$ $\qquad\circ\ \lim_{x\to\pi-}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right)=e^{\frac{-\pi^2}{2}}+1$

v π: srovnání s $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^p\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^p\,dx$ ($y=\pi-x$) $\begin{cases} p>-1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ p\le -1 \Rightarrow \text{DIV.}\end{cases}$

ZÁVĚR: $p>3 \Rightarrow$ KONV.

$p\le 3 \Rightarrow$ DIV.

---

m) $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 a v ∞

v 0: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to0}{o}(x^3) \Rightarrow \lim_{x\to0+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

srovnání: $\lim_{x\to0+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_0^1 \frac{x^3}{x^p}dx$ $\begin{cases} 3-p>-1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ 3-p\le-1 \Rightarrow \text{DIV.}\end{cases}$

v ∞: $\frac{x-1}{x^p}\le\frac{x-\sin x}{x^p}\le\frac{x+1}{x^p} \Rightarrow$ konvergence je ekvivalentní konvergenci integrálu $\int_1^\infty\frac{x+\alpha}{x^p}=\int_1^\infty \underbrace{x^{1-p}+\alpha x^{-p}}_{=x^{1-p}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}1}}dx$ $\begin{cases} 1-p<-1 \Rightarrow \text{KONV.} \\ 1-p\ge-1 \Rightarrow \text{DIV.}\end{cases}$

ZÁVĚR: $\int_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^p}dx$ KONV. pro $2<p<4$

DIV. pro $p\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$

(1p) n) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx$

- $p=0 \Rightarrow$ integrand je konstantní $0 \Rightarrow$ KONV.
- $p>0$: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} px}{px}=1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^1\frac{px}{x^n}dx \Rightarrow$ $1-n>-1 \Rightarrow$ KONV

  $1-n\le-1 \Rightarrow$ DIV.

  $n\in\mathbb{N}$, tedy pouze pro $n=1$ je šance na konvergenci

  $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ srovnání s $\int_1^\infty\frac{dx}{x^n} \Rightarrow$ $-n<-1 \Rightarrow$ KONV

  $-n\ge-1\Rightarrow$ DIV.

  Tedy DIV i pro $n=1$.

- $p<0$: $\operatorname{arctg} px=-\operatorname{arctg}|p|x$, tedy $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}dx=-\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}|p|x}{x^n}dx$, kterýžto integrál jsme právě vyšetřili.

ZÁVĚR: $p=0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ konv.

$p\neq0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ div.

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$ srovnáme $\operatorname{tg} x$ s x

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\quad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+} \cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

---

(19) ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnáme s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

$$\text{a s } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \text{ v } -1$$

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v −1: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém jen v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1}\,(<1)$

$$\int_0^1 \cancel{\ln x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

(1b) i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{1}{2}]$, problém v 0.

• $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ • $\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$$\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}\,dx \text{ KONV.} \iff \int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

$$\int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x^3}\,dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{x}+1\,dx = +\infty, \text{ tedy DIV.} \Rightarrow \int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)} \text{ DIV.}$$

---

j) $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

• $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x\to 1+}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy zjistit $\int_1^2\frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}\,dx = \int_1^2\frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2\frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}\,dx$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2(\sqrt{x}-1)^{1-p}\,dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\quad \sqrt{x} = 1+\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1) \quad \Rightarrow$ srovnání $\lim_{x\to 1+}\frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\frac{1}{2}(x-1))^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2(x-1)^{1-p}\,dx = \int_0^1 y^{1-p}\,dy \Rightarrow 1-p>-1 \iff p<2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y=x-1$, $dy=dx$, $x\in(1,2)\mapsto y\in(0,1)$ $\Rightarrow$ $1-p\le -1 \iff p\ge 2 \Rightarrow$ DIV.

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n .$$

2/ $\int_0^{\infty} f^+ = \int_0^{\infty} f^- = +\infty$.

3/ Kdyby $f \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, pak nutně $\int_0^{\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

tato řada konverguje, což je ve sporu s větou 44 , neboť

$\int_0^{\infty} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. ||

Co lze říci o (N) $\int_0^{\infty} f$ či o (ZN) $\int_0^{\infty} f$?

(2) $\boxed{3{,}51.^*}$ Zkoumejte $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} \cdot \sin^2 x}\, dx$ pro $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$.

|| Ukažte, že

1/ $\frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$,

2/ platí vztah

$$x \in (n\pi , (n+1)\pi) \Rightarrow \frac{(n\pi)^{\beta}}{1+\left[(n+1)\pi\right]^{\alpha} \cdot \sin^2 x} \leq \frac{x^{\beta}}{1+x^{\alpha} \sin^2 x} \leq$$

$$\leq \frac{\left[(n+1)\pi\right]^{\beta}}{1+(n\pi)^{\alpha} \cdot \sin^2 x} ,$$

3/ $A > 0 \Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + A}}$,

4/ $\alpha > 0$, $\beta \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{x^{\beta}\, dx}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x}$ konverguje ,

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi (n\pi)^{\beta}}{\sqrt{1+\left[(n+1)\pi\right]^{\alpha}}} \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{x^{\beta}\, dx}{1+ x^{\alpha} \cdot \sin^2 x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(n+1)\pi\right]^{\beta}}{\sqrt{1 + (n\pi)^{\alpha}}}$,

6/ náš integrál tedy konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-\frac{1}{2}\alpha}$,
tedy právě když $\beta - \frac{1}{2}\alpha < -1$ tj. právě když $\alpha > 2(\beta + 1)$. ||

$\boxed{3{,}52.}$ Poznámka

Podle předešlého cvičení konverguje například integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^5 \cdot \sin^2 x} .$$

Funkce $\frac{x}{1 + x^5 \cdot \sin^2 x}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$ a všimněte si, že přes tyto dvě podmínky není $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + x^5 \sin^2 x} = 0$. Stačí třeba uvažovat posloupnost $x_n = n\pi$ a dostáváme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x_n}{1 + x_n^5 \sin^2 x_n} =$

$= +\infty$. Čemu je tedy rovna $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1 + x^5 \sin^2 x}$?

/Viz též př. 3,37/.

3,53.* Buďte $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$. Potom

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1 + x^\alpha \cdot |\sin x|}\, dx \text{ konverguje } \iff \alpha > \beta + 1 .$$

Dokažte !

(3) **3,54.*** Buďte a,b,c kladná. Potom

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{e^{bx} \cdot \sin^2 x + e^{cx} \cdot \cos^2 x}\, dx \text{ konverguje } \iff b + c > 2a .$$

Dokažte !

‖ Obdobné př. 3,51 . Je nutno spočítat

$$\int_{\frac{2n+1}{2}\pi}^{\frac{2n+3}{2}\pi} \frac{1}{A \sin^2 x + B \cos^2 x}\, dx$$

Náš integrál pak konverguje $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{an}}{\sqrt{e^{bn+cn}}}$

konverguje $\iff b + c > 2a$. ‖

3,55.* Zařaďte funkci f , $f(x) = \dfrac{1}{e^x \cdot |\sin x|^a}$ do systémů

$\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, $\mathcal{L}^R_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ v závislosti na parametru a !

3,56. /Viz též př. 3,24/.

Definujme funkci f na intervalu $(0,1)$ předpisem :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}\right) .$$

Ukažte, že

a/ (N) $\int_0^1 f = 0$,

b/ (L) $\int_0^1 f$ neexistuje .

‖ Zřejmě $f \in \Lambda_{(0,1)}$, $f(x) = 2x \sin \dfrac{\pi}{x^2} - \dfrac{2\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2}$.

Funkce $2x \sin \dfrac{\pi}{x^2}$ leží v systému $\mathcal{L}_{(0,1)}$, vyšetřujme funkci g , $g(x) = -\dfrac{2\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2}$. Ukážeme-li, že $g \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$, vyplyne odtud a z věty 41 i $f \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$.

25535 25

Potom

1/ je-li $0 < A < +\infty$, platí $\left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

2/ je-li $A = 0$, platí $\left[g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ je-li $A = +\infty$, platí $\left[g \in \mathcal{L}^{*}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{*}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$."

Použijte definici limity a větu 31 .

Jak by bylo možné požadavky kladené na funkce f,g zeslabit ?

(4,5) 3,27°. Dokažte následující věty:

I/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,+\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^{\alpha} = A$. Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha > 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha > 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,\infty)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f = +\infty \right]$

Použijte buďto cvičení 3,25 a 3,26 anebo přímo definici limity .

II/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,b)$, $a,b \in E_1$. Nechť existuje $\lim_{x\to b_-} f(x) \cdot (b-x)^{\alpha} = A$.
Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow \alpha < 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha < 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f = +\infty \right]$.

Vyslovte obdobné věty pro nekladné funkce !
Jak je možno oslabit předpoklady o funkci f ?

3,28. Dokažte, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$!

1/ Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\frac{1}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /věta 48/. Jelikož je tato funkce kladná, je $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{*}_{(0,+\infty)}$ /věta 33/.

2/ Protože funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$, existuje $(R)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, tedy $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ / věta 49/. Jelikož v E_1 dále platí odhad $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ /věta 53 či cvič. 3,25/ , je i $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ /věta 31/. Použitím věty 26 odtud plyne, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Použijeme-li cvičení 3,27 , dostáváme ze vztahů

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 = 1 , \quad \alpha = 2 > 1$$