2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}.$
Pro $\alpha > 0$ substituujte $y = x^\alpha$.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x\ p, q \in \mathbb{R}$
Převeďte na $\int \frac{\sin y}{y^r}$.

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x\ \alpha, k \in \mathbb{R}$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\,\alpha} x\,\mathrm{d}x\ \alpha \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \mathrm{arctan}^{\,\beta} x\,\mathrm{d}x\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,\mathrm{d}x\ s, k \in \mathbb{R}$
Vyšetřete body 0, 1, ∞, u nekonečna srovnávejte s $\int_2^\infty x^a e^{bx}$.

(l) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x\ a, b \in \mathbb{R}$

(m) $\displaystyle\int_0^1 x^{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{arctan}\,(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x,\ p \in \mathbb{R}$

(p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctan}\,px}{x^n}\,\mathrm{d}x\ p \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

(q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\,(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

Bonus

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \beta \ge 0,\ \alpha > 0$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{e^{bx}\sin^2 x + e^{cx}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ a, b, c > 0$

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?

5. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot(x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?