Teorie řady

1 Řady obecně

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Poznámka 2. Konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech. Přesněji, následující podmínky jsou ekvivalentní pro řadu $\sum a_n$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje;

(iii) pro každé $k \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 3 (Linearita množiny konvergentních řad)**.** (a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n \quad \text{konverguje.}$$

Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lze formulovat i jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n \quad \text{diverguje.}$$

(b) Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2 Řady s nezápornými členy

Věta 4 (srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathcal{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathcal{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

1. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 5 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s **nezápornými** členy. Nechť

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*.$$

(a) Jestliže $K \in (0, \infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

(b) Jestliže $K = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$

(c) Jestliže $K = \infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

Lze formulovat i jako

(a) Jestliže $K \in (0, \infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{diverguje.}$$

(b) Jestliže $K = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{diverguje} \qquad \Leftarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje.}$$

(c) Jestliže $K = \infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje} \qquad \Leftarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{diverguje.}$$

Věta 6 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

1. Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 7 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

1. Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

3 Řady s obecnými členy

Věta 8 (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

4 Absolutní konvergence řad

Věta 9 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Věta 10 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

1. Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.
2. Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Věta 11 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

1. Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.
2. Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\lim |a_n| = \infty$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.