Parciální zlomky - teorie

Definice 1. *Racionální funkcí* budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 2 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) st $P <$ st Q,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1,\dots,x_k,\ \alpha_1,\dots,\alpha_l,\ \beta_1,\dots,\beta_l \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1,\dots,p_k,\ q_1,\dots,q_l \in \mathbb{N}$,

(v) žádné dva z mnohočlenů $x-x_1,\ x-x_2,\dots,x-x_k,\ x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots,x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen,

(vi) mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots,x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^1_1,\dots,A^1_{p_1},\dots,A^k_1,\dots,A^k_{p_k},\ B^1_1,\ C^1_1,\dots,\ B^1_{q_1},\ C^1_{q_1},\dots,\ B^l_1,\ C^l_1,\dots,B^l_{q_l},\ C^l_{q_l}$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A^1_1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A^1_{p_1}}{x-x_1} \\ & + \dots + \frac{A^k_1}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A^k_{p_k}}{x-x_k} \\ & + \frac{B^1_1 x + C^1_1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B^1_{q_1} x + C^1_{q_1}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ & + \frac{B^l_1 x + C^l_1}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B^l_{q_l} x + C^l_{q_l}}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Postup při integraci racionální funkce

1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int P_1(x) + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde st $P_2 <$ st Q, $Q \neq 0$.
2. Provedeme rozklad na parciální zlomky.
3. Integrace parciálních zlomků:

   (a)
   $$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & n > 1 \\ A \ln|x-a| & n = 1 \end{cases}$$
   toto pro $x \in (-\infty, a)$ nebo (a, ∞).

(b)

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}$$

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{-1}{q-1}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & q>1 \\ \ln(x^2+\alpha x+\beta) & q=1 \end{cases}$$

pro $x \in \mathbb{R}$

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right)^q} =$$

$$\frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^q}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}$$

provedeme substituci $t = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}$, celý integrál bude

$$\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-q}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q}$$

pro $q = 1$ získáme arkustangens, pro jiná q je potřeba použít perpartes a postupně snižovat mocninu:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1+t^2}{(t^2+1)^q}\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q}$$

První integrál je o stupeň nižší, druhý integrál proženeme per partes a získáme:

$$\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{1-q}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} - \frac{1}{1-q}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{q-1}}$$

celkem tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{2q-2}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} + \frac{2q-3}{2q-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t$$