(b) $\int (1 + \sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x)\,dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

(c) $\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int 7\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 7x^{2/3}+\frac{1}{2}\sin x-2\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 7\frac{x^{5/3}}{5/3}-\frac{1}{2}\cos x-2\arctan x+c$$

(d) $\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}\ln x + c$$

1

(e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

(f) $\int (3-x^2)^3\,\mathrm{d}x$

Řešení: Zřejmě

$$\int (3-x^2)^3\,dx = \int (27 - 9x^2 + 3x^4 - x^6)\,dx = 27x - 3x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

3. Lineární substituce

(a) $\int e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3}e^{-3x+1} + C$$

(b) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x\,dx$ a platí

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}e^y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1+x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

2 (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin x}$$

(e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1-\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

5. Per partes

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}] - \int -e^{-x}\,dx \overset{C}{=} -xe^{-x} - e^{-x}$$

(b) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x\cos x\,dx = [x\sin x] - \int \sin x\,dx \overset{C}{=} x\sin x + \cos x$$

(m) $\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int (1-y^2)\, dy \overset{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

(n) $\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \operatorname{cotg} x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}\, dx = -\int \frac{dy}{y^{1/4}} \overset{C}{=} \frac{4}{3} y^{3/4} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$$

3 (o) $\int \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x)\cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1\cdot\cos(\ln x) = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1\cdot\cos(\ln x) = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2\int 1\cdot\cos(\ln x) \overset{C}{=} x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \overset{C}{=} \frac{1}{2} x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

(p) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\, dx \overset{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$$

(q) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int y\, dy \overset{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan^2 x}{2}$$

Použijeme substituci $1+y^2=z$, $2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}z$. Dostaneme

$$=\int \frac{1}{2(z-1)\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$$

Substituce $t=\sqrt{z}$, $\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$. Máme

$$=\int \frac{1}{(t^2-1)}\mathrm{d}t.$$

To už je v tabulce primitivních funkcí, tedy:

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}}+c=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}+c$$

(w) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y=\ln x$. Pak $dy=\frac{1}{x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\int y^2\,dy\overset{C}{=}\frac{y^3}{3}=\frac{\ln^3 x}{3}$$

(x) $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

První per partes: $u'=\sin 2x$, $u=-\frac{1}{2}\cos 2x$, $v=x^2$, $v'=2x$.

$$\int x^2\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\right]+\int x\cos 2x=$$

Druhé per partes: $u'=\cos 2x$, $u=\frac{1}{2}\sin 2x$, $v=x$, $v'=1$.

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\overset{C}{=}-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$$

4 (y) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u'=\frac{1}{x^2}$, $u=-\frac{1}{x}$, $v=\arcsin x$, $v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\arcsin x\right]+\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

Substituce $y=\sqrt{1-x^2}$. Potom $dy=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a $x^2=1-y^2$.

$$=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{1-y^2}\,dy\overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=}-\frac{1}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}=-\frac{1}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

5

(d) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy \stackrel{C}{=} \ln|y| = \ln(|\ln(\ln x)|)$$

(e) $\int x^3 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x\, dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int y e^{-y} \, dy =$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \left[-y e^{-y}\right] + \int e^{-y} \, dy \stackrel{C}{=} -y e^{-y} - e^{-y} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

(f) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\, dx$ a platí

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln|y| = -\ln|\cos x|$$

(g) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$.

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{y} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(h) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} \, dy \stackrel{C}{=} 2 \operatorname{arctan} y = 2 \operatorname{arctan} \sqrt{x}$$

(b) $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x\,dx$ a platí

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}e^y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

(c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1+x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

(d) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin x}$$

6

(e) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1-\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

5. Per partes

(a) $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right] - \int -e^{-x}\,dx \overset{C}{=} -xe^{-x} - e^{-x}$$

(b) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x\cos x\,dx = [x\sin x] - \int \sin x\,dx \overset{C}{=} x\sin x + \cos x$$

(m) $\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int (1 - y^2)\, dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

7

(n) $\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \operatorname{cotg} x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}\, dx = -\int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} \frac{4}{3} y^{3/4} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$$

(o) $\int \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

(p) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\, dx \stackrel{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

(q) $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \int y\, dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan^2 x}{2}$$

Návod: Platí, že $\sqrt{x^6} = |x^3|$. Na intervalu $x \in (0, +\infty)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int (-x^3)\, dx = -\frac{x^4}{4} + C_2$$

Primitivní funkce ovšem existuje na celém $\mathbb{R}$, pokud se obě funkce shodují v bodě 0, tedy pokud $C_1 = C_2$ (princip lepení). Primitivní funkce jsou tedy určeny vztahy

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + C & x < 0 \\ C & x = 0 \\ \frac{x^4}{4} + C & x > 0 \end{cases}$$

kde C značí všude stejnou konstantu, avšak libovolně volenou.

Příklad 10. $f(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$

Návod: Platí, že

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx =$$

a nyní použijeme substituci $t = \sin x$, tudíž $dt = \cos x\, dx$ a dostaneme tak

$$= \int (1 - t^2)^2 \sqrt{t}\, dt = \int \left(\sqrt{t} - 2t^2\sqrt{t} + t^4\sqrt{t}\right) dt = \int \left(t^{1/2} - 2t^{5/2} + t^{9/2}\right) dt \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{4}{7} t^{7/2} + \frac{2}{11} t^{11/2} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x$$

Příklad 11. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

Návod: Použijeme substituci $t = 1 + \ln x$. Potom $dt = \frac{1}{x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}\, dx = \int \frac{t - 1}{\sqrt{t}}\, dt = \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt \overset{C}{=} \frac{2}{3} t^{3/2} - 2t^{1/2} = \frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} - 2(1 + \ln x)^{1/2}$$

Příklad 12. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

Návod: Platí, že

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\, dx =$$

a nyní použijeme substituci $t = \cos x$. Pak platí, že $dt = -\sin x\, dx$ a dostáváme

$$= -\int \frac{dt}{1 - t^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$$

8

Příklad 13. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$

Návod: Použijeme per partes

$$\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx = \int e^{-x} \operatorname{arctg} e^x\, dx = -e^{-x} \operatorname{arctg} e^x + \int e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + \int \frac{1}{1 + e^{2x}}\, dx =$$

a následně úpravy

$$= -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + \int \frac{1 + e^{2x} - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx = -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right) dx \overset{C}{=} -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + x - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x})$$

Poslední integrál lze počítat substitucí $t = e^{2x}$.

Všehochuť

9

Příklad 30. $f(x) = \ln^2 x$

Návod: Použijeme substituci $t = \ln x$. Potom $x = e^t$ a $dx = e^t\,dt$ a dostaneme integrál, který počítáme dvakrát per partes.

$$\int \ln^2 x\,dx = \int t^2 e^t\,dt = t^2e^t - \int (2te^t)\,dt = t^2e^t - 2te^t + \int 2e^t\,dt \overset{C}{=} e^t(t^2 - 2t + 2) = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$$

Příklad 31. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Návod: Použijeme substituci $t = x^2 + x + 1$ a dostaneme, že

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt \overset{C}{=} \ln|t| = \ln(x^2+x+1)$$

Příklad 32. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Návod: Použijeme substituci $t = e^x$. Potom $dt = e^x\,dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{dt}{1+t} \overset{C}{=} \ln|1+t| = \ln(1+e^x)$$

Příklad 33. $f(x) = \dfrac{x^{17}-5}{x-1}$

Návod: Platí, že

$$x^{17} - 1 = (x-1)(x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1)$$

Odtud máme, že

$$\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,dx = \int \frac{x^{17}-1}{x-1}\,dx - \int \frac{4}{x-1}\,dx \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x - 4\ln|x-1|$$

Příklad 34. $f(x) = \dfrac{x^{17}-5}{x^2-1}$

Návod: Platí, že

$$x^{17} - 1 = (x-1)(x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1)$$

a dále, že

$$(x^{16} + x^{15}) + (x^{14} + x^{13}) + \ldots + (x+1) = (x+1)(x^{15} + x^{13} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x) + 1$$

Odtud plyne, že

$$\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^{17}-1}{x^2-1}\,dx - \int \frac{4}{x^2-1}\,dx =$$
$$= \int (x^{15} + x^{13} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{4}{x^2-1}\,dx \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{14}}{14} + \ldots + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Příklad 35. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

40

(404) Pomocí vhodné substituce převeďte daný integrál na integrál racionální lomené funkce.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1 + 2\operatorname{cotg} x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + 2\frac{1-t^2}{2t}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}\,dt =$$

$$= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}\,dt.$$

Poznámka 31. Po rozkladu na parciální zlomky, integraci racionálních lomených funkcí a vrácení substituce vyjde

$$\cdots = \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2} - 1)\right] - \frac{2}{5}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x - \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{5}\,(\sin x + 2\cdot\cos x - 2)}{5\sin x}\right] + C.$$

Parc. zlomky:

$$\int \frac{4(t-2)}{5(t^2+1)^2} + \frac{4/5}{t^2+1} + \frac{4/5}{-(t^2-t-1)}\,dt$$

$$\frac{4}{5}\arctan t$$

$$+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{+\frac{5}{4}-(t-\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{t-1/2}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)^2}$$

$$\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{2t-1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{2t-1}{\sqrt{5}}}\right|$$

$$\int \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2t-4}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{-1}{1+t^2} + \int -\frac{8}{5}\,\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$-\frac{4}{5}\left[\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right]$$

na intervalu $(-2,2)$. V poslední rovnosti jsme užili toho, že $f^{-1}(y) = \arcsin \frac{y}{2}$ pro $y \in (-2,2)$ (mimo dalších dobře známých vlastností goniometrických funkcí). ■

Poznámka. Při použití věty o substituci se často používá symbolického zápisu, který si předvedeme tím, že přepíšeme řešení předchozího příkladu s jeho pomocí. Uvažujeme substituci $y = 2\sin x (= f(x))$ na $\mathbb{R}$. Symbol $\mathrm{d}y$ bude zaměněn výrazem $f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\cos x\,\mathrm{d}x$. Dosadíme za y i $\mathrm{d}y$ do vyšetřovaného neurčitého integrálu:

$$\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y = \int \sqrt{4-(2\cos x)^2}\cdot 2\cos x\,\mathrm{d}x = 2x + \sin 2x + \mathbf{C}$$

pro y z intervalu $(-2,2)$, neboť pro $y \in (-2,2)$ existuje jediné x splňující $f(x) = y$, totiž $x = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = h(y)$. Spojitá prostá funkce h tedy zobrazuje interval $(-2,2)$ na nějaký otevřený interval I $(I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$. Můžeme proto za x dosadit $\arcsin \frac{y}{2}$ na pravé straně rovnosti a dostáváme stejný výsledek jako v předchozím příkladu.

Všimněte si, že jsme vlastně uvedeným postupem ověřili všechny předpoklady druhé věty o substituci (zúžení f na $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je prosté). Můžeme se ale též odvolat na silnější verzi, o které jsme se zmínili v poznámce za druhou větou o substituci, protože $(f \circ h)(y) = y$ pro $y \in (-2,2)$.

Na jednoduchém příkladu si ještě předvedeme použití téže symboliky při aplikaci první věty o substituci:

Spočteme $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Funkce je spojitá na maximálních intervalech $I_k = (k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ provedeme substituci $y = \operatorname{tg} x (= f(x) > 0)$ na I_k. „Platí $\mathrm{d}y = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$“, a tedy na I_k existuje vlastní derivace f'. Dosazením dostáváme

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}y^{3/2} + \mathbf{C} = \frac{2}{3}\operatorname{tg} x^{3/2} + \mathbf{C}.$$

Jak jsme již poznamenali, f' je vlastní na I_k. Zároveň jsme též vlastně již ověřili, že $f(I_k) \subset (A,B) = (0,\infty)$, i to, že k funkci $g(y) = \sqrt{y}$ existuje na (A,B) primitivní funkce. Použití první věty o substituci bylo tedy oprávněné.

Vzhledem k tomu, že ověření předpokladů věty o substituci je při použití předchozího postupu spíše implicitní, doporučujeme především osvojit si metodu použití věty tak, jak byla vyložena v předchozím textu, abyste byli schopni i při použití symboliky se záměnou $\mathrm{d}y$ a $f'(x)\,\mathrm{d}x$ vysvětlit, proč je postup korektní. To je důvod, proč jsme se o tomto postupu zmínili až v závěrečné poznámce. Na cvičeních a u zkoušek se samozřejmě řiďte požadavky Vašich učitelů.

V následujících odstavcích si předvedeme na několika příkladech postupy, které lze použít k hledání primitivních funkcí pro velké skupiny funkcí jistého typu. Tím není řečeno, že uvedené metody jsou v každém případě pro konkrétní funkci nejvhodnější, a už vůbec ne jediné možné. Doporučujeme je ovládat, ale vždy důkladně zvážit, zda v daném případě není jiný postup vhodnější. Několik takových méně universálních, ale někdy podstatně vhodnějších možností uvádíme (srovnejte například předchozí příklad s metodami §7).

na $\mathbb{R}$. ∎

První větu o substituci můžeme použít i v řadě případů, kdy se tak zjevně nenabízí jako v předchozím příkladu.

P ř í k l a d Spočtěte $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Maximálními otevřenými intervaly v definičním oboru jsou interval $(0,1)$ a interval $(1,\infty)$. Uvážíme, že $\frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a že $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Položíme $g(y) = \frac{2y}{1-y}$ pro $y \in (0,1)$, nebo např. také pro $y \in (-\infty,1)$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in (0,1)$.

Stejně můžeme postupovat též pro $y \in (1,\infty)$ a $x \in (1,\infty)$. Pro oba případy proto postupujme dále společně.

Pak na tyto funkce užijeme první větu o substituci a dostaneme, že

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2y}{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

Posledním výrazem se ovšem rozumí primitivní funkce složená s funkcí $f(x) = \sqrt{x}$. Jde o konvenci, která vychází z toho, že v tuto chvíli víme, že funkci proměnné y napravo je třeba složit s funkcí f, abychom dostali skutečnou rovnost.

Výpočet zakončíme často používaným „trikem".

$$\int \frac{2y}{1-y}\,\mathrm{d}y = -2\int \frac{1-y-1}{1-y}\,\mathrm{d}y =$$
$$= -2\int 1\,\mathrm{d}y + 2\int \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}y = -2y - 2\log|1-y| + \mathbf{C}.$$

Po dosazení $f(x)$ za y dostáváme

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{x} - 2\log|1-\sqrt{x}| + \mathbf{C}$$

na intervalu $(0,1)$ (resp. $(1,\infty)$). ∎

11

P ř í k l a d Spočtěte $\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y$.

Řešení. Použijeme druhou větu o substituci na funkci $f(x) = 2\sin x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Máme $f'(x) = 2\cos x \neq 0$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a f je bijekce intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ na interval $(-2,2)$. Předpoklady věty jsou tedy splněny, a máme, že

$$\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y = \int \left(\sqrt{4-4\sin^2 x}\right) 2\cos x\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4\int \frac{1+\cos 2x}{2} = 2x + \sin 2x + \mathbf{C} = 2\arcsin\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + \mathbf{C}$$

Příklad 35. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

12

Návod: Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Postupným dosazením $x=0$, $x=2$ a $x=3$ dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\right) dx \overset{C}{=} x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3|$$

Příklad 36. (+) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$

Návod: Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{(x^4+5x^2+4)-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C+Dx}{x^2+4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno x v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto x^2 budeme psát t.

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{C}{t+4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za t lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů A, B. Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t+4) + C(t+1)$$

13

(402) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit substitucí $t = 2x$ a následně substitucí $z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$. Výhodnější je ale následující způsob.

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = \int \frac{1}{1+2\sin x\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{1+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

Návod: Použijeme rozklad
$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$$
Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.
$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=\int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}\,dx=\frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,dx=$$
Nyní použijeme substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg} t$ a dostaneme, že
$$=\frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2+1)^2}\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 t\,dt \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=}\frac{4\sqrt{3}}{9}(t+\sin t\cos t)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}=$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Integrace různými postupy

Příklad 66. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^{100}}$

Návod: Provedeme substituci $t=x-1$. Potom $x=t+1$ a dostaneme, že
$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx=\int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\,dt=\int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}\,dt=$$
$$=\int \left(\frac{1}{t^{97}}+\frac{3}{t^{98}}+\frac{3}{t^{99}}+\frac{1}{t^{100}}\right)dt \overset{C}{=} -\frac{1}{96t^{96}}-\frac{3}{97t^{97}}-\frac{3}{98t^{98}}-\frac{1}{99t^{99}}=$$
$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$$

Příklad 67. $f(x)=\dfrac{x}{x^8-1}$

Návod: Budeme substituovat $t=x^2$. Dostaneme
$$\int \frac{x}{x^8-1}\,dx=\int \frac{1}{2}\frac{1}{t^4-1}\,dt=$$
a nyní použijeme rozklad
$$=\int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{t^2+1}\right)dt \overset{C}{=} \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} t=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2$$

14

Příklad 68. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^8+3}$

Návod: Budeme substituovat $t=x^4$. Dostaneme, že
$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+3} \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$$

Příklad 69. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^6+1}$