2. bonusové cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s **nezápornými** členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad - srovnávací kritérium

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$
   Řešení: Řada konverguje, neboť $\frac{1}{(2+1/n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$
   Řešení: Řada konverguje absolutně (a tedy konverguje), neboť
   $$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$$
   Řešení:
   Máme
   $$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n\right| \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right),$$

tedy stačí ukázat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{4^n}\right).$$

Použijeme LSK s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{4^n}\right)}{\frac{\pi}{4^n}} = 1.$$

Neb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4^n}$ konverguje - jde o geometrickou řadu, z LSK a SK konverguje (absolutně a tedy i konverguje) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$.
K výpočtu limity jsme použili Heineho $x_n = \pi/4^n$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg}\, y}{y} = 1$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(n+1)}$$

Řešení: Pro $z \in (-1, 1)$ máme

$$\frac{z^n}{\ln(n+1)} \leq z^n.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ konverguje, neb jde o geometrickou řadu.
Pro $|z| > 1$ řada diverguje, neb nesplňuje nutnou podmínku konvergence (při výpočtu lze použít L'Hospitala).
Pro $z = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, která konverguje z Leibnize.
Pro $z = 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)},$$

která diverguje, tedy ze SK diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.
Závěr: Řada konverguje absolutně pro $z \in (-1, 1)$ a konverguje pro $z \in [-1, 1)$.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - \sqrt{n^4 - (-1)^n n})$$

Řešení: Řadu prve upravíme

$$(n^2 - \sqrt{n^4 - (-1)^n n}) = \frac{n^4 - n^4 + (-1)^n n}{n^2 + \sqrt{n^4 - (-1)^n n}} = (-1)^n \frac{n}{n^2 + \sqrt{n^4 - (-1)^n n}}$$
$$= (-1)^n \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - (-1)^n / n}}$$

Pak řada konverguje z Leibnize (po pečlivém ověření předpokladů).

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)\text{arctan }(n^3-5n+6)$$

Řešení: Máme

$$\sqrt[3]{n^3+n}-n=\frac{n^3+n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$$

Řada má nezáporné členy. Porovnáme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}\text{arctan }(n^3-5n+6)}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{6}.$$

Z LSK pak původní řada diverguje.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1\right)$$

Řešení: Upravíme

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Řada má nezáporné členy, porovnáme s $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}-1\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}-1\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$$

Neb $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ diverguje, diverguje i původní řada. Při výpočtu jsme užili Heineho $x_n=1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ a tabulkovou limitu $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n!}e^{nz}$$

Řešení: Řada má kladné členy. Užijeme podílové kritérium, pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)!}e^{(n+1)z}}{\frac{\ln n}{n!}e^{nz}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{1}{(n+1)}e^{z}=0,$$

tedy řada konverguje.

Teoretické příklady

3. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní. Rozhodněte, zda platí:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní. NE

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní. NE

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní. ANO

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$ je konvergentní. ANO

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní. NE

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní. NE

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní. NE