2. bonusové cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s **nezápornými** členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad - srovnávací kritérium

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$

   (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$$

   (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(n+1)}$$

   (c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - \sqrt{n^4 - (-1)^n n})$$

   (d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) \arctan\, (n^3 - 5n + 6)$$

   (e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right)$$

   (f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!} e^{nz}$$

Teoretické příklady

3. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní. Rozhodněte, zda platí:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$ je konvergentní.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní.

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní.

4. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.

   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge 1$.

   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge n_0$.